

101 Trivia di Algebra Lineare.

CdL: Informatica, Università degli studi di Bologna.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it - Aggiornato al 23 febbraio 2026

Si determini il valore di verità delle seguenti proposizioni di Algebra Lineare.

- Se l'affermazione è vera, se ne fornisca una dimostrazione sintetica (anche richiamando definizioni o teoremi noti).
- Se l'affermazione è falsa, si esibisca un controesempio.

Nota: La falsità di una proposizione può essere dimostrata anche citando un teorema o una proprietà che ne contraddice l'enunciato.

Alle domande occorrerà rispondere in maniera *concisa* (il termine “conciso” è da intendersi come l'intersezione tra sintesi e rigore). **Evitare discorsi schematici.** Si tenga inoltre presente che i quesiti qui presenti non richiedono calcoli laboriosi bensì una buona (talvolta molto buona) comprensione concettuale dell'Algebra Lineare, restando sempre all'interno del programma svolto.

Notazioni. La notazione si desume dal contesto. In ogni caso:

- Se non specificato diversamente, si utilizzano le lettere latine maiuscole $A, B, C, \dots$ per indicare matrici quadrate. Se in un esercizio compaiono più matrici, esse sono da intendersi di stesso ordine.
- Gli indici n, m indicano valori naturali e non nulli.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ indica lo spazio delle matrici di dimensione n a coefficienti in $\mathbb{K}$ (tipicamente si ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- I vettori sono scritti talvolta in grassetto, talvolta no. Non vi è una ragione specifica per questo.
- Si lavora in $\mathbb{R}^n$. Se volete poi divertirvi in altri campi/anelli, fate voi (con prudenza).

Le seguenti domande potrebbero essere parte *integrativa* dell'esame orale (a volte una, più di una o nessuna). Gli studenti sono invitati a ragionarci per conto proprio, o anche in gruppo, senza usare schifezze (e.g. CiarpameGPT). Il documento non è strutturato per chi studia a memoria o meccanicamente.

Legenda. 🐣: quesito leggermente impegnativo ma formativo. 🐣🐣: come prima, ma di più.

QUESITI.

0. Posso avere 240 vettori generatori di $\mathbb{R}^{120}$.
1. 🐣 Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e $A^t A$ hanno stesso nucleo e quindi stesso rango.
2. Una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile solo se ha n autovalori distinti.
3. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (applicazione lineare) è necessariamente suriettiva.
4. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ tre vettori in $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim(\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}) = 3$.
5. Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale V è anche iniettivo.
6. 🐣 Date due matrici A, B si ha che $\text{rk}(A + B) < \text{rk}(A) + \text{rk}(B)$.
7. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se λ_0 è autovalore di A , allora λ_0^n è autovalore di A^n .
8. Se $\det(A) = 0$ allora A non è diagonalizzabile.
9. Sia O_n la matrice nulla di ordine n . O_n è diagonalizzabile?

10. Siano $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 40 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 100 \end{pmatrix}$ vettori in $\mathbb{R}^2$, e g una applicazione lineare tale che $gv = w$. È vero che v è autovettore di g ?
11. Una matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ha autovalori $\{-3; 2; 3; 10\}$. Qual è il valore del suo determinante?
12. Se λ_0 è un autovalore di A allora $-\lambda_0$ è autovalore di A^t .
13. Se 11 è autovalore di A allora 11^{-1} è autovalore di A^{-1} .
14. ☛ Se A^{-1} è diagonalizzabile allora anche A è diagonalizzabile.
15. Se λ_0 è autovalore di A , allora $\lambda_0 + k$ è autovalore di kA , per k reale non nullo.
16. Scrivere, se possibile, due vettori linearmente dipendenti di cui solo uno dei due è multiplo dell'altro.
17. Sia a una applicazione lineare con matrice associata A , tale che $A = A^t$. Allora a è sempre diagonalizzabile.
18. Siano λ_0, μ_0 rispettivamente un autovalore di A e uno di B . Allora $\lambda_0 + \mu_0$ è autovalore di $A + B$.
19. È impossibile che una matrice abbia polinomio caratteristico $p(x) = x^2 + 1$.
20. Sia A una matrice tale che $A^2 = A$. Trovare gli autovalori di A .
21. Se 0 è un autovalore di A allora A non è invertibile.
22. Se 0 è un autovalore di A allora L_A , applicazione lineare di cui A è matrice associata, non è suriettiva.
23. Sia V uno spazio vettoriale, e $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$. Allora $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti.
24. Se $\det(A) = p$ allora $\det(A^n) = p^n$.
25. Ogni matrice è combinazione lineare di matrici di rango uno.
26. L'insieme vuoto è la base di $\ker(O_n)$, dove O_n è la matrice nulla di ordine n .
27. Sia $f: \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con $f(e_k) = w_k$ per $1 \leq k \leq 5$ e $f(e_k) = \mathbf{0}$ per $6 \leq k \leq 8$, dove e_k sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^8$ e w_k sono vettori non nulli. Allora è possibile che $\dim(\ker f) = 7$.
28. Se una applicazione lineare f è tale che $\dim(\ker f) = \dim(\text{im } f)$, allora $\ker(f) = \text{im}(f)$.
29. Per l'applicazione lineare $f(x, y) = (x - y, -x + y)$ si ha che $\ker(f) = \text{im}(f)$.
30. Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. È possibile avere $U \cap W = \emptyset$?
31. Date due matrici A, B di stesso ordine, $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$.
32. Dare un esempio di applicazione lineare $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ tale che $\ker(f) \cap \text{im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.
33. Siano U, W due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Sia dia, se possibile, un esempio di U, W tali che $\dim(U \cap W) = 1$.
34. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^1$ ammette base? Perché? In caso affermativo esibirne una a piacere.
35. Siano V, W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora $V \cup W$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
36. Sia Θ una applicazione la cui azione su un generico vettore w ne produce una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ radianti. Quali sono gli autovettori di Θ ?
37. Sia W uno spazio vettoriale. Una base ortogonale di W è anche ortonormale? Perché? È vero il viceversa?
38. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^{127}$ un sottospazio vettoriale. È vero che $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 127$? Motivare la risposta.
39. Una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ non può essere suriettiva.
40. Sia A una matrice tale che $A^2 = O_n$ (matrice nulla di ordine n). Allora $A^3 = O_n$.
41. Sia f una applicazione lineare, $f: \mathbb{R}^{14} \rightarrow \mathbb{R}^{14}$ sicuramente diagonalizzabile. Allora esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^{14}$ fatta di autovettori di f .

42. Si consideri l'esercizio 36. Quali sono gli autovettori di Θ^4 ?
43. ☹️☹️ Si consideri ora un'altra applicazione, $\Xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tale che la sua azione su un generico vettore lo ruoti di 220° . Per quali valori di n ogni vettore è autovettore dell'applicazione Ξ^n ?
44. Siano $m > n$. Per ogni coppia di matrici rettangolari $G \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, il prodotto GH è invertibile e la sua inversa è $H^{-1}G^{-1}$.
45. ☹️ Sia $f: V \rightarrow W$ un isomorfismo. A patto di scegliere basi opportune, f è rappresentato dalla matrice identità.
46. Sia A una matrice invertibile. Si ha $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
47. Sia f un endomorfismo. Allora f è anche un isomorfismo.
48. Siano A, B due matrici aventi stesso polinomio caratteristico $p(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$. Allora esiste G invertibile tale che $B = G^{-1}AG$.
49. Esiste una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$ tale che $\ker(f) = \text{im}(f)$.
50. Stabilire l'esistenza, o la non esistenza, di una applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cui matrice rappresentativa abbia polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, e avente autovettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
51. Data f applicazione lineare, $f: U \rightarrow V$, e una applicazione lineare $g: W \rightarrow V$ allora esiste $g \circ f$ e si ha $(g \circ f): U \rightarrow W$.
52. Esiste $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\ker(f) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{im}(f)$.
53. Se f è applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f^2 = 0$, allora $\ker(f) \subseteq \text{im}(f)$.
54. Determinare una applicazione lineare g la cui matrice associata abbia polinomio caratteristico $p(x) = x^4 - x^2$.
55. Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Esiste f applicazione lineare, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f) = E$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \in \text{im}(f)$?
56. Sia $v = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$ autovettore di f , con f applicazione lineare. Allora $w = \begin{pmatrix} \pi^2 \\ 4\pi^2 \end{pmatrix}$ è autovettore di f^2 .
57. Se f è una applicazione lineare iniettiva, allora $\ker(f + \text{id}) \oplus \ker(f - \text{id}) = \mathbb{R}^3$.
58. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $\text{im}(f) \subset \ker(f)$. Allora 0 è l'unico autovalore di f .
59. ☹️ Sia F la matrice aventi per righe i vettori $v_1 = e_1, v_2 = -e_3, v_3 = e_2$. Esiste un sottospazio $E \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione due, tale che $Fv \in E, \forall v \in E$? In caso affermativo, determinarlo esplicitamente.
60. Dare, se esiste, un endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^3$ avente polinomio caratteristico $p(t) = (1 - t)^3$ e diverso dall'identità.
61. Se f è endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^n$, allora $\ker(f) \oplus \text{im}(f) = \mathbb{R}^n$.
62. Se f è endomorfismo diagonalizzabile di $\mathbb{R}^n$, allora $\ker(f) \perp \text{im}(f)$.
63. Siano U, V, W sottospazi vettoriali. Qual è la relazione di Grassmann per $\dim(U + V + W)$?
64. Sia f endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che $\ker(f + \text{id}) \oplus \ker(f - 2\text{id}) = \mathbb{R}^3$. Allora f è diagonalizzabile.
65. Siano U, V sottospazi di $\mathbb{R}^8$ con $\dim(U) = 5$. Allora $\dim(U + V) \leq 6$.
66. Dati U, V sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, esibire un sottospazio vettoriale V' tale che $U \cup V'$ è ancora sottospazio vettoriale.
67. ☹️ Siano $U = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = 3z\}$. Sia $f: U + V \rightarrow U \cap V$ una applicazione lineare. Scrivere F , la matrice rappresentativa di f .

68. In $\mathbb{R}^3$ stabilire, argomentando in ogni caso, se esiste un insieme che soddisfa le seguenti proprietà.
- Due vettori linearmente indipendenti che generano.
 - Tre vettori che non generano.
 - Generatori che non sono una base.
 - Insieme che contiene una base ma non genera.
 - Due vettori di cui solo uno è dipendente dall'altro.
 - Insieme che non contiene una base ma genera.
69. Dire se $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{Q}^3$.
70. Esiste un'unica applicazione lineare $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(0, 1) = (2, 4)$ e $\phi(1, 1) = (2, 4)$?
71. Sia $S: V \rightarrow W$ una applicazione lineare tra due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, con $\dim(V) = n$. Se $\dim(\ker(S)) \geq k$, quali sono le possibili dimensioni di $\text{im}(S)$?
72. ☛ Sia $V = \mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali. Verificare che l'applicazione $\delta: V \rightarrow V$ definita da $\delta(p(x)) = p'(x)$ è lineare per ogni $p(x)$. Quali sono gli autovalori e gli autovettori di V ?
73. Se $\dim(\ker(f)) > 0$ allora f non ha alcun autovalore nullo.
74. Siano $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}_2[x]$ e $T: V \rightarrow W$ l'applicazione lineare definita da $T(p, q, s) = p + qx + sx^2$. Si trovi una base per $S \subset \mathbb{R}^3$ tale che $T(S)$ sia l'insieme dei polinomi aventi un punto stazionario in $x = 1$.
75. Esiste una relazione tra rango e determinante di una matrice.
76. Dati U, V sottospazi di $\mathbb{R}^n$ con $U \subset V$. Allora $U^\perp \subset V^\perp$.
77. In $\mathbb{R}^3$ sia $W = \text{span}\{(1, 1, 1)\}$. Descrivere "a parole" chi sono i vettori di $W^\perp$.
78. Sia $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}(\mathbb{R})$. Sia U lo spazio generato dalle righe di A . Descrivere chi è $U^\perp$.
79. ☛ In $\mathbb{R}^2$ sia definito il prodotto scalare $\langle u, w \rangle = u_1 w_1 - u_2 w_2$, sia $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $W = \text{span}\{u\}$. Mostrare che $u \in W$ e $u \in W^\perp$.
80. Sia f una applicazione lineare tale che $\text{im}(f) \subset \ker(f)$. Allora $f^2 = 0$.
81. Sia f una applicazione lineare tale che $\ker(f) \subset \text{im}(f)$. Allora $f^2 = f$.
82. Sia $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Sia noto che $\det(A) = 17$ e che il polinomio caratteristico è $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Qual è il valore del coefficiente d ?
83. Se esiste, esibire una matrice B tale che $AB = \text{id}$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
84. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ e siano $v \in \mathbb{R}^n$, $u \in \text{im}(f)$, $w \in \ker(f)$. $f^2 = f$ se e solo se $v = u + w$.
85. Esiste $f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$, applicazione lineare, che non possiede autovalori reali.
86. Esiste f , endomorfismo lineare, che non possiede autovalori complessi.
87. ☛ Sia h un endomorfismo lineare, e sia noto che $\ker(h) \not\subset \text{im}(h)$. Stabilire se siano vere o false le seguenti:
- h non è invertibile.
 - $\exists v \neq 0: h(v) = 0$.
 - h è diagonalizzabile.
88. ☛☛ Sia g una applicazione lineare, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Siano w, v tali che $g^t(w) = 0$ e $v \in \text{im}(g)$. Allora $w \cdot v = 0$.

89. Siano U, V sottospazi di $\mathbb{R}^5$. Stabilire se siano vere o false le seguenti:
- $\dim(U + V) > 4$.
 - $\dim(U) + \dim(V) = 3$ con $\dim(U + V) = 3$.
 - Se $\{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5\}$ è base di V , allora è anche base di $V^\perp$.
90. Una base di $V^\perp$, con $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 6y + 3t = 0\}$, è $\{(1, -2, 0, 1)\}$.
91. ☹ Esiste $f : V \rightarrow V$ endomorfismo lineare tale che $f^3 = f$ e $(f + \text{id})^2 = 0$.
92. Esiste $g : V \rightarrow V$ endomorfismo lineare tale che $g^4 = g$ e $g^2 = g + \text{id}$.
93. Se $w = (1, 3, 5) \in \ker(f)$, con $f : V \rightarrow V$ endomorfismo lineare, e $f(9, 9, 9) = (5, 3, 1)$, allora $(10, 12, 14) \in f^{-1}(5, 3, 1)$.
94. Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un endomorfismo lineare tale che $\sum_{k=0}^{m-1} \ker(f - k \text{id}) = m$ allora f è diagonalizzabile.
95. ☹ Esiste $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ applicazione lineare con $\text{im}(f) = \text{span}\{e_1, e_2\}$, $\ker(f) \subseteq \text{im}(f)$ e tale che $f^3 = 0$ ma $f^2 \neq 0$.
96. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più tre, e $f : V \rightarrow V$ l'applicazione lineare definita da $f(p(x)) = p''(x) + 5p'(x)$. Si calcoli $\det(f)$.
97. Esistono $p, q \in \mathbb{N}$ con $p + q = 10$, tali che $f : \mathbb{R}^{p+4} \rightarrow \mathbb{R}^{q-8}$ è suriettiva.
98. ☹ Sia $g : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^0$ una applicazione lineare. Trovare $\text{im}(g)$. Qual è la matrice associata a g ?
99. ☹ Esiste $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ invertibile.
100. Siano f, g applicazioni lineari tali che $\dim(\ker(f)) = 3 - \dim(\text{im}(g))$, e $\text{im}(f) \subseteq \ker(g)$. Allora g è suriettiva oppure f è iniettiva. Nelle stesse ipotesi, è vero o falso che f e g devono possedere almeno un autovalore nullo?