

29 ulteriori Trivia di Algebra Lineare per esaltati.

Informatica, Università degli studi di Bologna.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

Il seguente documento nasce per via di una mera questione statistica: è congetturato¹ che in una classe di N persone, circa \sqrt{N} si appassionano fortemente al corso al punto da voler studiare la materia in modo più approfondito. È una media e, come ogni concetto statistico, va preso con pinze e scherno.

Gli esaltati che hanno voglia di divertirsi (eventualmente di notte) possono cimentarsi con questi ulteriori giochi. (I mondi dell'Algebra Lineare sono infinitamente più estesi di quanto si possa leggere qui)

Sia noto che quanto appare in questo documento NON fa parte dell'esame. È un extra, indipendente dal corso.

Alcune notazioni o terminologie:

- \mathbb{K} indica un campo, generalmente \mathbb{R} oppure \mathbb{C} se non specificato diversamente.
- $\text{hom}(\cdot, \cdot)$ significa "omomorfismi" o talvolta "insieme degli omomorfismi" (con relativa specificazione di spazio vettoriale di partenza e arrivo)
- $\text{End}(\cdot)$ è l'insieme degli endomorfismi di un determinato spazio vettoriale \cdot (il campo è implicitamente definito).
- La matrice identità può essere denotata nei seguenti modi: id , I , $\mathbb{1}$.

Quesiti.

0. Costruire tutte le matrici invertibili $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tali che $HH^T = \text{id}_2$.
1. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 5. Sia W il sottospazio vettoriale di V costituito dai polinomi $p(x)$ tali che $p(x) = p(-x)$. Calcolare $\dim(W)$. Trovare un sottospazio T di V tale che $W \oplus T = V$.

2. Sia $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ la matrice

$$B = \begin{pmatrix} n^2 & -1 \\ p & n-p \end{pmatrix}, \quad n, p \in \mathbb{Q}$$

Si mostri che $B^2 = \mathbf{0}$ se e solo se $n = p = 0$.

3. Sia $f: \mathbb{R}^{350} \rightarrow \mathbb{R}^{250}$ una applicazione lineare, e $V \subseteq \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio tale che $\dim(V) = 300$ e $\dim(V \cap \ker(f)) = 50$. Determinare $\dim(\text{im}(f))$ e stabilire se f è suriettiva oppure no.
4. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{Q} e sia $f \in \text{End}(V)$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
 - (a) Calcolare il polinomio caratteristico di $g = f + (f + 2I)^{-1}$, e determinare le molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore.
 - (b) Ripetere in $V = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
5. Dare un esempio di matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tale che A^2 sia diagonalizzabile e A^3 non la sia.
6. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Mostrare che $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A se e solo se è autovalore di A^T .
7. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mostrare che se A è una matrice simmetrica nilpotente, allora $A = \mathbf{0}$.
8. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ e sia $f: \mathbb{K}^8 \rightarrow \mathbb{K}^6$ un'applicazione lineare tale che $\ker(f)$ abbia 121 elementi. Allora f è suriettiva.

¹ Essendo una congettura, non vi è alcuna attuale dimostrazione se non quella osservativa.

9. Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V . Mostrare che

(a) $\ker(f) \subseteq \ker(f^2)$

(b) $f(\ker(f^2)) \subseteq \ker(f)$

Considerare poi la restrizione di f al nucleo di f^2 e mostrare che

(c) $\dim(\ker(f^2)) \leq 2 \dim(\ker(f))$

10. Vero o falso? Sia $W \subset \mathbb{K}^5$ un sottospazio di dimensione 2. Allora possiamo scrivere W come intersezione di due sottospazi di dimensione 4.

11. Determinare autovalori e autospazi di $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $f(A) = A - 3A^T$.

12. Siamo W_1, W_2, W_3 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V tali che $V = W_1 \oplus W_2 = W_1 \oplus W_3$. Allora $W_2 = W_3$.

13. Sia $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, e si consideri l'insieme

$$\langle C \rangle = \{CM \mid M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

ottenuto moltiplicando a destra C per ogni possibile matrice quadrata di ordine n . Mostrare che $\langle C \rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

14. Ci sono infiniti sottospazi vettoriali in \mathbb{Q}^2 .

15. Stabilire l'esistenza di una applicazione lineare $f : V \rightarrow V$ tale che f sia iniettiva, $f^2 = 2f - \text{id}$ e $f^{-1} = \alpha f + \beta \text{id}$ per qualche α, β reali. Se tale applicazione esiste, costruirne un esempio in $V = \mathbb{R}^2$.

16. Dare, se possibile, due sottospazi vettoriali U, V tali che $U + V = \mathbb{R}^4$ ove la somma non è diretta.

17. Stabilire i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $f(x, y, z) = (ax + y + 2z, 2ax - z, -2y + az)$ è un automorfismo.

18. Costruire una applicazione $f : V \rightarrow V$ con $V = \mathbb{R}^5$ tale che $\dim(\ker(f^2 - 4f)) = 1$.

19. Trovare gli autovalori e gli autovettori dell'operatore derivata $D := \frac{d}{dx}$, con $D : V \rightarrow V$, dove $V = C^\infty(\mathbb{R})$.

20. Siano $W_1 = \{(t, t, t, -t), t \in \mathbb{Q}\}$ e $W_2 = \{(a+b+c, b-c, a-b, a-c) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Scrivere l'equazione cartesiana di $W_1 \cap W_2$.

21. Esiste un automorfismo nilpotente e non suriettivo su uno spazio vettoriale di dimensione pari? Esiste un automorfismo nilpotente su uno spazio vettoriale di dimensione pari?

22. Si calcoli $\dim(V)$ per $V = \{f \in \text{hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid f(e_1) = 2f(e_2), f(e_4) \in \text{span}\{(1, 1, 1, 1)\}\}$

23. Mostrare che la derivazione $\frac{d}{dx} : \mathbb{K}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{K}[x]_{\leq 3}$ è nilpotente.

24. Sia \mathbb{K} un campo e sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K} di una variabile e di grado al più 4. Sia f l'endomorfismo definito da $f(a) = a'$, per ogni $a \in V$ (dove a' denota l'usuale derivata), e sia $g = f + f^2$.

Trovare gli autovalori di f e di g .

25. Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile in \mathbb{R} . Utilizzare solamente i teoremi dell'Analisi Matematica durante lo studio delle radici del polinomio caratteristico. Non si usi alcun calcolatore (è possibile tuttavia fare delle approssimazioni numeriche di comodo, ove possibile e senza esagerare).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 8 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

26. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1 + x_3, bx_2 + x_4, x_1 - x_3 + ax_4, ax_1 - bx_2 + x_3), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Stabilire per quali valori di a, b , f è

- (a) Un isomorfismo.
- (b) Un epimorfismo non iniettivo.
- (c) Un automorfismo.
- (d) Un endomorfismo diagonalizzabile.

27. Si dimostri che se $f: V \rightarrow W$ e $g: W \rightarrow Z$, allora $g \circ f = 0 \iff \text{im}(f) \subset \ker(g)$.

28. Siano f, g, h applicazioni lineari su uno spazio vettoriale V di dimensione N . Sia noto che

- (1) $\dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) = \dim(\text{im}(h)) + 4$
- (2) $\text{im}(f) \subseteq \text{im}(h)$
- (3) $\ker(g) \subset \ker(f)$
- (4) $\dim(\text{im}(h)) - \dim(\text{im}(g)) = \dim(\text{im}(f)) - 6$

Stabilire se è possibile che $\ker(f), \ker(g), \ker(h)$ abbiano le stesse dimensioni. Stabilire se è possibile che $\text{im}(f), \text{im}(g), \text{im}(h)$ abbiano le stesse dimensioni. Indipendentemente da quanto trovato nei due punti precedenti, stabilire il minimo valore di $N = \dim(V)$ per cui una tale terna di applicazioni lineari possa esistere.