Problemi ed Esercizi di Sistemi Dinamici e ODE.

Corso di Laurea in Fisica + Matematica.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

Alcuni dei seguenti problemi ed esercizi sono assegnati periodicamente. È formativo e importante mettersi all'opera e cercare di risolverli tutti per arrivare pronti all'esame, fermo restando che risolverli tutti non è né condizione sufficiente né tantomeno necessaria per superare l'esame (ma di certo fornisce un grande aiuto).

P.0. Sulla Terra alla latitudine ϕ una boccia è lanciata su un piano orizzontale liscio con velocità v_0 nella direzione del meridiano. Qual è la forza agente e quale la deviazione rispetto al meridiano dopo un percorso di lunghezza ℓ?

P.1. Un razzo è lanciato verticalmente dalla superficie terrestre con velocità uguale alla velocità di fuga. Trascurando la variazione di massa del razzo, trovare la legge del moto.

P.2. Trovare la forza centrale necessaria perché una particella descriva una spirale di equazione $r = e^{-\theta}$.

P.3. Dato un campo centrale attrattivo $f(r)$ determinare la condizione perché un'orbita circolare sia stabile.
Provare che se $f(r) = -ke^{-r^2}/r^2$ la stabilità si ha solo per $r^2 < 1/2$.

P.4. Un punto materiale si muove in un campo di forze centrali lungo una circonferenza in un punto della quale si trova il centro del campo stesso.
Scrivere l'espressione della forza e del potenziale e determinare la legge $\phi = \phi(t)$ per $\phi \gg 1$.

P.5. Alla latitudine ϕ si calcoli l'inclinazione del filo a piombo rispetto alla verticale.

P.6. Un punto materiale si muove su un'elica cilindrica di raggio R e passo h, soggetto alla forza peso e ad una forza resistente $\boldsymbol{F} = -2\beta\boldsymbol{v}$.
Determinare la velocità limite e la legge del moto se $\boldsymbol{r}(0) = R\hat{\imath}, \boldsymbol{v}(0) = 0$.

P.7. Determinare la legge del moto per $t > 0$ di un punto materiale di massa unitaria, mobile lungo l'asse $\hat{x}$ sotto l'azione della forza $F = -\frac{V}{(1+t)} + 3(1+t)$ se le condizioni iniziali sono $v(0) = v_0, x(0) = 0$.

P.8. Trovare la traiettoria per il grave utilizzando il principio di Maupertuis.

P.9. Un punto materiale è soggetto al campo di forze centrale di potenziale $V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ con $\alpha > 0, \beta > 0$;

(a) determinare le orbite;

(b) calcolare la sezione d'urto differenziale.

P.10. Determinare la legge di forza centrale che dà origine all'orbita $r(\varphi) = R(1 - \cos(\varphi))$.

P.11. Si considerino i due problemi di Cauchy

$$A \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\,\mathrm{tg}(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{1+xt} = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

1. Indicare per quale dei due è possibile determinare una soluzione in forma chiusa.
2. Determinare la soluzione di cui al punto 1).
3. Risolvere entrambi i problemi iterativamente, arrestandosi alla seconda iterazione, usando il metodo di Picard, e confrontare con la soluzione esatta di cui al punto 1).

P.12. Assegnato il campo centrale
$$V(r) = \beta r^p$$
con $\beta, p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ determinare le condizioni sui parametri β, p affinché possano esistere orbite circolari stabili.

P.13. Studiare le orbite vicine all'orbita circolare nel campo centrale $V(r) = \alpha r^2$ con $\alpha > 0$.

P.14. Dato un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie
$$\dot{x} = A(t)x$$
dimostrare che il Wronskiano W all'instante t è dato da
$$W(t) = W(0)\exp\left[\int_0^t \operatorname{tr}\left\{A(u)\right\} \mathrm{d}u\right]$$
ove $\operatorname{tr}\{A\}$ è la traccia della matrice dei coefficienti. Dedurre (dimostrandone il motivo) che per l'oscillatore armonico il Wronskiano è costante.

P.15. Si consideri il moto unidimensionale di un punto nel campo di forza di potenziale
$$V(x) = -\frac{1}{2}\big(\sinh(x)\big)^4$$

(a) Determinare il moto per condizioni iniziali $x_0 > 0$, $v_0 < 0$ tali che l'energia totale sia nulla.

(b) Per il potenziale $V(x) = -\frac{1}{2}x^4$ che approssima il precedente in un intorno dell'origine si determini la soluzione di energia nulla, le varietà stabile e instabile del punto critico (traiettorie dello spazio delle fasi passanti per il punto critico) e si tracci qualitativamente l'andamento delle traiettorie nello spazio delle fasi.

P.16. Si consideri il campo di forza
$$\boldsymbol{F} = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\hat{\imath} + \frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\hat{\jmath} + \frac{2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,\hat{k}$$

1. Dimostrare che si tratta di un campo conservativo.
2. Trovare le componenti F_r, F_θ, F_ϕ di $\boldsymbol{F}$ in coordinate sferiche.
3. Determinare un potenziale per $\boldsymbol{F}$.

P.17. Risolvere il problema di Cauchy costituito dall'equazione differenziale a coefficienti costanti
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = a(1+bt)\cos(\Omega t)$$
corredata dalle condizioni iniziali
$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$
assumendo $0 < \beta < \omega$.

P.18. Data la curva piana di equazioni parametriche in coordinate polari
$$r(t) = r_0 e^{\beta t}$$
$$\varphi(t) = \omega t$$
determinare l'ascissa curvilinea, il versore tangente, il versore normale, il versore binormale e il raggio di curvatura.

P.19. Determinare i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione periodica

$$f(t) = t - n, \qquad n \le t < n+1$$

P.20. Si consideri il moto unidimensionale di un punto materiale di massa unitaria soggetto al potenziale

$$V(x) = \frac{|x|^\alpha}{\alpha}$$

con $\alpha > 1$. Detti E l'energia e T il periodo del moto, determinare esplicitamente la funzione $T(E)$.

P.21. Si individuino e classifichino i punti di equilibrio del seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-a+by), & x, b > 0 \\ \dot{y} = y(c-bx), & c > 0 \end{cases}$$

calcolando le soluzioni linearizzate e tracciandone approssimativamente le traiettorie di fase.

P.22. Si consideri un moto unidimensionale retto dalla forza $F(x)$ definita da

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{\operatorname{sign}(x)}{\sqrt{|x|-1}}, & |x| > 1 \\ 0, & |x| < 1 \end{cases}$$

ove $\operatorname{sign}(x)$ è la funzione segno.

(a) Studiare le configurazioni di equilibrio.

(b) Tracciare le traiettorie di fase.

(c) Calcolare il periodo del moto $T(E)$ in funzione dell'energia.

P.23. Risolvere il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

per assegnate condizioni iniziali $x_k(0)$.

P.24. Determinare un campo centrale $V(r)$ nel quale l'angolo azimutale φ varii nel tempo secondo la legge

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}(\omega t)$$

ove ω è una costante positiva. Interpretare il risultato.

P.25. Partendo dal principio di Maupertuis e facendo uso degli angoli di Eulero, ricavare le equazioni della traiettoria del moto per un corpo rigido giroscopico posto nel campo della forza peso.

P.26. Trovare l'equazione della lossodromia sulla sfera, ovvero l'equazione della curva che, sulla superficie sferica, ha il vettore tangente che forma un angolo fissato α con le geodetiche, ossia con i meridiani. Calcolare altresì la lunghezza di tale curva.

P.27. Un punto materiale si muove in un piano verticale, sotto l'azione del suo peso, lungo una curva di classe $\mathcal{C}^1$ la cui equazione cartesiana è

$$y(x) = \begin{cases} \log(a+bx^2) - \log(a), & |x| \le \sqrt{\dfrac{1}{|b|}} \\ \alpha x^2 + \beta|x|, & |x| \ge \sqrt{\dfrac{1}{|b|}} \end{cases}$$

ove $a, b \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 1$ è un parametro fissato.
Studiare il moto e il ritratto di fase in funzione del parametro b e calcolare il periodo del moto per piccole oscillazioni attorno a $x = 0$.

P.28. Si determinino le geodetiche sulla varietà con metrica $\mathrm{d}s^2 = \sqrt{E-y}[\,\mathrm{d}x^2 + \,\mathrm{d}y^2]$.

P.29. Calcolare l'energia cinetica di un triangolo equilatero omogeneo di lato L e massa M che ruota con velocità angolare costante Ω attorno ad un asse passante per uno dei lati.

P.30. Scrivere la funzione di Hamilton e trovare le costanti del moto per un oscillatore bidimensionale isotropo, cioè un punto di massa m soggetto alla forza $\boldsymbol{F} = -k(x\hat{\imath} + u\hat{\jmath})$.

P.31. Per il problema dei due corpi esprimere nel formalismo Hamiltoniano la trasformazione alle coordinate relative e del centro di massa, e ai corrispondenti momenti coniugati, scrivendo esplicitamente la trasformazione canonica e la sua funzione generatriche.

P.32. Se $\mathcal{F}(X, p, t)$ è una costante del moto e l'Hamiltoniana H è anch'essa una costante del moto, provare che $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$ è costante e vale $[H, \mathcal{F}]$.
Nel caso di un campo di forza uniforme $F_x = -mg$ provare il precedente risultato se $\mathcal{F} = x - \frac{p}{m}t + \frac{1}{2}gt^2$.

P.33. Una particella si muove sotto l'azione della forza $F = k\frac{e^{-t/\tau}}{x^2}$ ove k, τ sono costanti positive.
Si calcolino la lagrangiana e l'hamiltoniana del sistema e l'energia totale, si discuta la conservazione dell'energia.

P.34. Nel piano (x, y) si trova una lamina sottile di massa M.

(a) Si dimostri che il tensore di inerzia è della forma

$$I = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}$$

(b) Si determinino i momenti principali di inerzia e l'angolo di rotazione che fa passare dagli assi x e y agli assi principali di inerzia.

(c) Si esprimano A, B, C nel caso di una lamina limitata da una curva chiusa di equazione, in coordinate polari, $\rho = \rho(\varphi)$ e nel caso di densità uniforme.

(d) Si calcolino esplicitamente A, B, C se $\rho = \sin(2\varphi)$, $0 \le \varphi \le \phi/2$.

P.35. Mostrare che per qualsiasi campo scalare $\phi(x, y, z)$ di classe $\mathcal{C}^2$ vale $\nabla \times (\phi\nabla\phi) = 0$; a quale punto della dimostrazione occorre richiedere che $\phi \in \mathcal{C}^2$?

P.36. Scrivere la Lagrangiana di un toro, costituito di materiale omogeneo, di massa M e raggi r, R, che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, esprimendola esplicitamente in funzione dei dati del problema.

P.37. Data l'Hamiltoniana $H(p, q) = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(7p^2 - 2\sqrt{\alpha}pq + 5q^2\right)$ determinare:

1. l'insieme dei valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'origine del piano delle fasi è un punto d'equilibrio stabile per la dinamica associata ad H;
2. la frequenza del moto per $\alpha = 3$, sapendo che tale valore appartiene all'insieme di cui al punto 1);
3. per lo stesso valore di α, la trasformazione canonica che porta H in $H(j)$, essendo j la variabile d'azione.

P.38. Siano dati due pendoli di lunghezze l_i e masse m_i $(i = 1, 2)$ i cui punti di sospensione distano L e sono situati sulla stessa quota. I due pendoli interagiscono con una coppia di momento $\boldsymbol{N} = -\alpha\hat{\boldsymbol{n}}(\phi_2 - \phi_1)$, ove ϕ_1, ϕ_2 sono le elongazioni angolari dei due pendoli rispetto alla verticale, $\hat{\boldsymbol{n}}$ è il versore ortogonale al piano di oscillazione e α è una costante. Studiare come dipendono dal valore di α le frequenze caratteristiche di oscillazione, e valutarne esplicitamente i limiti per $\alpha \to 0$ e $\alpha \to +\infty$ indicando a quali sistemi meccanici corrispondono tali casi limite.

P.39. Data l'Hamiltoniana

$$H = j_1 + \omega j_2 + \lambda(j_1 + \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

calcolare i primi ordini della teoria perturbativa e confrontare il risultato con l'integrazione diretta delle equazioni di Hamilton.

P.40. Si considerino due punti materiali di ugual massa, mobili in un piano verticale sotto l'azione della forza peso e congiunti da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza l. Uno dei due punti è inoltre vincolato a muoversi lungo una curva $y = f(x)$.

(a) Scrivere la Lagrangiana.

(b) Porre le condizioni per l'esistenza di una configurazione di equilibrio stabile.

(c) Dire quali tra le seguenti curve soddisfano le condizioni date al precedente punto b)

$$y = |a|^3 x^3$$

$$y = a^2 x^2$$

$$y = -|a|\sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}}$$

$$y = |x|$$

$$y = a^4 x^4$$

(d) Selezionare ulteriormente le curve per le quali il moto nell'intorno della posizione di equilibrio stabile può essere descritto con la teoria delle piccole oscillazioni e scrivere la corrispondente Lagrangiana approssimata.

P.41. Determinare i valori del momento angolare l per cui sono possibili orbite finite nel seguente potenziale centrale

$$U(r) = -\frac{\alpha e^{-kr}}{r}$$

P.42. Si consideri l'Hamiltoniano

$$H = p^2 + x^{2n}$$

Per una data energia $H = E$ si determinino:

(a) il periodo del moto;

(b) l'azione e l'hamiltoniana come funzione dell'azione.

(Si indichi con

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, \mathrm{d}t$$

la funzione Beta di Eulero.)

P.43. Si consideri un punto materiale soggetto ad una forza elastica e una forza di attrito non lineare che conducono alla seguente equazione del moto:

$$\ddot{x} + \dot{x}(ax^2 + \dot{x}^2 - 1) + ax = 0$$

Mostrare che questa equazione ha un ciclo limite, specificandone la natura geometrica ed illustrandone l'origine da un punto di vista meccanico.

P.44. Risolvere il problema del moto descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} + gx$$

utilizzando l'equazione di Hamilton-Jacobi.

P.45. Determinare la terna intrinseca e il raggio di curvatura sulla curva intersezione delle seguenti superfici in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} z = \log(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 < \infty \\ y = x\,\mathrm{tg}(z) \end{cases}$$

P.46. Un corpo in moto in un campo centrale descrive un'orbita la cui equazione, in coordinate polari, è

$$r(\phi) = \frac{R}{(\cos(\phi))^{2k} + (\sin(\phi))^{2k}}$$

con k intero e R costante.
Determinare il potenziale del campo per $k = 1$ e per $k = 2$.

P.47. Data l'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(a) determinare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità;

(b) determinare l'equazione della separatrice;

(c) tracciare (approssimativamente) il ritratto di fase del sistema;

(d) calcolare, facoltativamente, al primo ordine significativo la variazione della frequenza con l'ampiezza per le orbite vicine alla posizione di equilibrio stabile.

P.48. Con una opportuna scelta dello spazio delle fasi rappresentativo, parametrizzato tramite le "variabili di Déprit", l'hamiltoniana di un corpo rigido libero, con un punto fisso, può essere ridotta alla seguente:

$$H = \frac{L^2}{2I_3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2(l)}{I_1} + \frac{\cos^2(l)}{I_2}\right)(G^2 - L^2)$$

ove I_k con $k = 1,2,3$ sono i momenti principali di inerzia del corpo rigido e le variabili di fase sono i momenti G ed L, e le loro coordinate angolari coniugate sono g ed l.
G rappresenta il modulo del momento angolare, mentre L è la proiezione del momento angolare stesso sull'asse principale di inerzia numero 3 del corpo rigido. g e l sono angoli misurati nei piani ortogonali rispettivamente al momento angolare e al terzo asse principale di inerzia.
Ciò premesso, si consideri il caso "quasi giroscopico", in cui il momento principale di inerzia I_2 sia circa uguale al momento I_1: $I_2 = I_1(1 - \varepsilon)$ con $|\varepsilon| \ll 1$. Sotto tale ipotesi si calcolino perturbativamente, al primo ordine in ε le variazioni $\Delta\omega_g$ e $\Delta\omega_l$ delle componenti della velocità angolare, rispetto al caso giroscopico perfetto.

P.49. Un satellite in moto nel campo centrale Kepleriano è sottoposto a una forza dissipativa $F = -\alpha\boldsymbol{v}$ con $\alpha \ll 1$. Scrivere le equazioni lagrangiane del moto e determinare la variazione dell'energia e del momento angolare su un periodo di rivoluzione.

P.50. Data l'Hamiltoniana

$$H = \sum \frac{p_k^2}{2} + \omega_k^2 \frac{x_k^2}{2} + \epsilon \sum x_k^4$$

si applichi la teoria perturbativa al primo ordine e si determini la variazione nel tempo delle azioni indicando il valore del loro periodo.

P.51. Si consideri un punto di massa unitaria soggetto al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{2}, & x \leq 1 \end{cases}$$

1. Disegnare lo spazio delle fasi;
2. determinare il periodo delle orbite limitate in funzione dell'energia (suggerimento: utilizzare l'integrale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\left(E - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}\right)}} = -\frac{1}{2|E|}\sqrt{2x - 1 - 2|E|x^2} + \frac{1}{\left(2|E|\right)^{\frac{3}{2}}} \arcsin\left(\frac{2|E|x - 1}{\sqrt{1 - 2|E|}}\right)$$

con $E < 0$);
3. (facoltativo) calcolare in forma implicita la legge oraria per le orbite limitate.

P.52. Un punto materiale si muove sulla superficie di un cono con asse verticale e apertura α. Scrivere la lagrangiana del sistema, le equazioni del moto e determinare gli integrali primi del sistema. Determinare la reazione del vincolo nel caso di orbite circolari.

P.53. Determinare la funzione $f(q)$ in modo che la trasformazione $Q = e^p f(q)$, $P = e^{-p} f(q)$ sia canonica e calcolarne la funzione generatrice.

P.54. Dato il sistema di due oscillatori armonici descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2)$$

trovare la trasformazione canonica che porta alle variabili d'azione e angolo.

P.55. Risolvere perturbativamente, arrestandosi al primo ordine, il problema meccanico descritto dalla seguente hamiltoniana

$$H(A,\varphi) = \omega_0 A + \lambda A^2 \sin^2(\varphi)$$

dove A, φ sono variabili azione-angolo e λ è il parametro di sviluppo per la serie perturbativa ($\lambda A/\omega_0 \ll 1$).

P.56. Definito l'operatore di Lie D_g associato a una funzione $g(p,q)$ sullo spazio delle fasi come

$$D_g[f(p,q)] \equiv \{f, g\}$$

calcolare $\exp(D_g[q])$ ed $\exp(D_g[p])$ quando $g(p,q) = p$ e quando $g(p,q) = q$. Interpretare il risultato come trasformazione dello spazio delle fasi in sé.

P.57. Data l'Hamiltoniana $H = H_0 + \varepsilon H_1$ con

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + xy}{2}$$

$$H_1 = x^6 + 2y^6$$

si esegua la trasformazione canonica che rende H_0 funzione delle sole variabili d'azione e si calcolino, al primo ordine in ε, le frequenze proprie del sistema.

P.58. Determinare dominio e codominio della seguente trasformazione $T : (p,q) \to (P,Q)$

$$P = P_0\left(e^{\alpha p(1+\beta q)} - 1\right)$$

$$Q = Q_0 \log(1 + \beta q) e^{-\alpha p(1+\beta q)}$$

ove P_0, Q_0, α, β sono parametri.
Porre le condizioni per la canonicità di T e determinare la funzione generatrice $F_2(q,P)$.

P.59. Si consideri l'hamiltoniana

$$H(j,\phi) = \mathrm{J}(1+\varepsilon\phi)$$

(a) Indicare se la varietà su cui è definito il sistema dinamico descritto da H è il cilindro $C = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{T}^1$, motivando la risposta.

(b) Risolvere esattamente le equazioni di Hamilton per arbitrarie condizioni iniziali $j(0)$ e $\phi(0)$.

(c) Determinare la trasformazione canonica che riconduce H a dipendere solo da J, trovandone la funzione generatrice $F(\mathrm{J},\phi)$.

P.60. Data la trasformazione di coordinate in $\mathbb{R}^n$

$$Q = Aq$$

determinare la corrispondente trasformazione canonica nello spazio delle fasi e scriverne la funzione generatrice.

P.61. Si consideri l'hamiltoniana

$$H(j,\Phi,t) = \omega j + \epsilon V(j,\Phi,t)$$

ove ω è un irrazionale, V è na funzione periodica in Φ e nel tempo di periodo 2π.
Determinare una trasformazione canonica dipendente dal tempo che riconduca H alla forma normale.
Calcolare esplicitamente l'hamiltoniana in forma normale e la trasormazione canonica, al primo ordine perturbativo, nel caso in cui

$$V = j(\sin(\Phi)\cos(t))^2$$

P.62. Calcolare esplicitamente i primi otto termini della trasformazione canonica definita tramite la serie di Lie di generatore $G(p,q) = p^2q^2$ e dare l'espressione esplicita della trasformazione: $P \equiv P(o,q)$ e $Q \equiv Q(p,q)$.

P.63. Applicare la teoria canonica delle perturbazioni all'hamiltoniana

$$H = \left[\frac{p_1^2+\omega_1^2x_1^2}{2}\right]^n + \left[\frac{p_2^2+\omega_2^2x_2^2}{2}\right]^n + \frac{\lambda}{2^{2m}}x_1^m x_2^m p_1^m p_2^m$$

arrestandosi al primo ordine in λ.

P.64. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H = \sum_{s\geq 1} t^{s-1}\chi_s(p,q)$$

Determinare, usando l'operatore di Lie associato ad H, l'evoluzione temporale di una qualsiasi variabile dinamica A, essendo dato il suo valore ad un istante iniziale $t=0$.

P.65. Si consideri l'hamiltoniana espressa, in variabili d'azione e d'angolo in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$, nella forma

$$H = H_0(\boldsymbol{j}) + \varepsilon j_1^2 j_2^2 \cos^2(\phi_1)\cos^2(\phi_2)$$

con $H_0(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{j}$; usando la teoria canonica delle perturbazioni al primo ordine in ε, individuare, in funzione dello stesso parametro perturbativo, il toro di $H_0(\boldsymbol{j})$ che si trasforma in un punto fisso del flusso generato da H.