Alcuni esercizi - Matematica Per Economisti

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

Lista aggiornata al 6 agosto 2025

Questo documento contiene una raccolta di esercizi e quesiti da me preparata e curata per il corso *"Matematica per Economisti"* tenuto dal Prof. Iliyan V. Georgiev durante il primo anno del corso di laurea in Economia, Mercati e Istituzioni (E.M.I.) - Università di Bologna.

Nelle rispettive sezioni, gli esercizi non seguono né un ordine di difficoltà né un ordine di svolgimento; gli esercizi sono contrassegnati da un numero di simboli ☕ compreso tra 0 e 4 che ne descrive la complessità, per esempio:

☕ - indica un esercizio non immediato ma nemmeno complicato, che richiede un ragionamento semplice ed efficace, invocando definizioni o Teoremi studiati;
☕☕☕☕ - indica un esercizio difficile, di livello superiore. Si sconsiglia l'approccio a tali esercizi prima di aver risolto gli altri.

Un asterisco $(*)$ denota esercizi provenienti da prove d'esame passate o da simulazioni d'esame.

Ecco alcune ovvietà e consigli.
Ovvietà : non esiste un metro di misura assoluto per valutare la difficoltà di un esercizio: alcuni esercizi semplici potrebbero apparire ostici all'inizio, e diventare banali in seguito *et vice versa.*
Consiglio : è bene spendere tempo sugli esercizi, riflettendo seriamente anche ore o giorni, eliminando fin da subito l'idea di "dover per forza" risolvere un esercizio in un tempo prestabilito o, peggio ancora, in modo meccanico capendo poco di quel che si sta facendo.
Ovvietà : il primo passo è quello di *comprendere* quello che il testo chiede: *"non ragioniam di lor, ma guarda e passa"* (Dante, Inf. III - vv. 51) non è un atteggiamento da riservare ai concetti matematici.
Consiglio : non fiondarsi subito e/o solamente sugli esercizi d'esame: l'insieme dei problemi qui presentati è costruito in modo dinamico, per far evolvere la coscienza e la capacità matematica richiesta.

La notazione matematica utilizzata è standard, ma sarà chiarita laddove necessario. In particolare: $\mathbb{N}$ rappresenta l'insieme dei numeri interi non negativi, $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi, $\mathbb{Q}$ denota il campo dei numeri razionali e $\mathbb{R}$ è il campo dei reali. Dato un insieme generico $\mathbb{G}$, si indicano con $\mathbb{G}^+$ e $\mathbb{G}^-$ rispettivamente l'insieme degli elementi non negativi e non positivi di $\mathbb{G}$. Si denota con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ lo spazio delle matrici di ordine $m \times n$ sul campo $\mathbb{K}$ (generalmente $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$). Negli intervalli sulla retta reale si usa $(\ ,\ )$ per indicare esclusione e $[\ ,\ ]$ per indicare inclusione degli estremi. In generale comunque il significato della notazione utilizzata si desume coscientemente dal contesto.

Due parole sull'esame scritto.

L'esame scritto è composto da un certo numero di quesiti la cui natura è principalmente teorica. La risoluzione di tali quesiti richiede argomentazione invocando (senza doverli ri-dimostrare) Teoremi, definizioni, proprietà e proposizioni apprese in parte durante il corso e in parte tramite studio e approfondimento individuale. Talvolta si dovrà anche pervenire ad un risultato numerico, mentre altre volte sarà richiesto e/o sufficiente un esempio o un controesempio.

Il punteggio massimo per un esercizio sarà ottenuto esibendo procedimenti furbi e accorgimenti matematici (quando possibile) che permettono di ridurre notevolmente il volume dei calcoli ausiliari. I metodi di forza bruta, invece, sono svantaggiosi: riducono il punteggio massimo ottenibile e necessitano di un tempo di computazione molto maggiore.

0. Algebra Lineare.

Premessa: la seguente sezione non è parte del corso *Matematica per Economisti*: questi argomenti saranno affrontatati durante il secondo semestre nel corso di "*Fondamenti di Matematica*". Qualche esercizio può, o potrà, comunque risultare utile allo studente curioso e interessato.

Esercizio 0.1. Nello spazio $\mathbb{Q}^3$ siano dati i vettori

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificare che $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ generano $\mathbb{Q}^3$.

Esercizio 0.2. Determinare due sottospazi U, V di $\mathbb{R}^4$ tali che $U + V = \mathbb{R}^4$ senza che la somma sia diretta.

Esercizio 0.3. Sia $f : \mathbb{R}^{350} \to \mathbb{R}^{250}$ una applicazione lineare; sia $V \subset \mathbb{R}^{350}$ un sottospazio vettoriale con $\dim(V) = 300$ e $\dim(V \cap \ker(f)) = 50$. Calcolare le dimensioni di $f(V)$ e di $V + \ker(f)$. Dire infine se f è suriettiva o no.

Esercizio 0.4. Sia $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{R})$. Dimostrare che A e $\mathrm{A}^\mathrm{t}\mathrm{A}$ hanno lo stesso nucleo e quindi lo stesso rango.

Esercizio 0.5. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y - z, 2y + z)$.
Sia $\mathcal{B} = \{(1, 2, -4), (0, 1, 1), (1, 0, -7)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $\mathrm{M}_\mathcal{B}$ associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ nel codominio e alla base canonica nel dominio.

Esercizio 0.6. Siano n, r due interi positivi, e $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$, dove $\mathbb{K}$ indica il campo dei reali o dei numeri complessi, indistintamente. Si consideri l'applicazione lineare $\phi_\mathrm{A} : \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ definita da

$$\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$$

(a) Trovare gli autovalori e gli autovettori di ϕ_A in funzione di quelli di A.

(b) Dedurre in particolare che se A è diagonalizzabile allora ϕ_A è diagonalizzabile.

Esercizio 0.7. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia

$$\mathrm{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$?

(b) Si consideri ora, per $a \in \mathbb{Q}$, la stessa matrice in $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$. Esistono valori di a per i quali essa è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$?

Esercizio 0.8. Sia $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare definito da

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 4x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - 3x_2 y_3 - 3x_3 y_2 + 9x_3 y_3$$

Determinare la matrice $\mathrm{G}_\mathcal{B}$ rappresentativa di g rispetto alla base data, e la matrice G_e rappresentativa di g rispetto alla base canonica.

Esercizio 0.9. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$, ortonormale rispetto al prodotto scalare canonico, che diagonalizzi l'endomorfismo $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 0.10. Mostrare che se $f \in \mathsf{End}(V)$ è un endomorfismo non nullo di uno spazio vettoriale V tale che $\mathsf{im}(f) \subseteq \ker(f)$ allora f non è diagonalizzabile. È vero, viceversa, che se f non è diagonalizzabile allora $\mathsf{im}(f) \subseteq \ker(f)$?

Esercizio 0.11. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere (provvedendo una dimostrazione) o false (provvedendo un controesempio).

(a) Una matrice quadrata è diagonalizzabile solo se ha autovalori distinti.

(b) Una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è necessariamente suriettiva.

(c) Siano $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ tre vettori non nulli in $\mathbb{R}^5$. Allora $\dim\left(\mathsf{span}\, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\right) = 3$.

(d) Se $U, W \subset \mathbb{R}^4$ sono due sottospazi vettoriali di dimensione 3, allora $U \cap W$ contiene almeno due vettori linearmente indipendenti.

(e) Date due matrici $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ allora $\mathsf{rk}\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right) \leq \mathsf{rk}\left(\mathrm{A}\right) + \mathsf{rk}\left(\mathrm{B}\right)$.

(f) Ogni matrice è combinazione lineare di matrici di rango uno.

(g) Sia $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se λ_0 è autovalore di A, allora λ_0^n è autovalore di A^n, per ogni $n > 0$ naturale.

(h) La matrice nulla di ordine n è diagonalizzabile.

(i) Due matrici congruenti $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ aventi stesso polinomio caratteristico sono anche simili.

(j) Data $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, è impossibile che A^2 sia diagonalizzabile e A^3 non la sia.

(k) Sia A una matrice tale che $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$. Allora i suoi autovalori sono solo 0 e 1.

(l) Se 0 è un autovalore di A allora A non è suriettiva.

(m) È impossibile che una matrice abbia polinomio caratteristico $p(x) = x^2 + 1$.

(n) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ tale che $\ker(f) \cap \mathsf{im}(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(o) Esistono U, W sottospazi vettoriali tali che $U \cap W = \emptyset$.

1. Successioni e Serie.

Premessa: attenersi a quanto visto a lezione e nelle esercitazioni. L'eventuale studio di convergenza è da affrontarsi solamente tramite confronto con la serie armonica e geometrica, oppure utilizzando opportune maggiorazioni.

Esercizio 1.1. Calcolare il valore delle somme $\sum\limits_{n=100}^{1000} \frac{3^{n-2}\cdot 2^{1-n}}{2^{2n}\cdot 20^{n}}$

Esercizio 1.2. Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definita da $a_n = \frac{1}{3^n+n}$. Studiare la convergenza della serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 1.3. Si calcoli $\sum\limits_{k=p}^{N} \frac{4^{k+1}-(-1)^k\sqrt[3]{k}}{2^k}$ nei seguenti casi:

(a) $p = 0, N = 11$ (b) $p = 13, N = 1729$ (c) $p = 1729, N \to +\infty$

Esercizio 1.4. ☕ Calcolare il valore delle seguenti somme.

(a) $\sum\limits_{k=10}^{+\infty} \left(\ln(2)\right)^{2-3k}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{1}{3^n} & n \in \mathbb{N}\setminus 2\mathbb{N} \end{cases}$

(c) $\sum\limits_{n=300}^{+\infty} 9^{2-\frac{n}{2}}\left(\ln(8)\right)^n$

(d) $\sum\limits_{k=127}^{1001} \left(\frac{e^2}{8}\right)^{1-2k}$

Esercizio 1.5.* Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\ln(3)\right)^{ni}$

Esercizio 1.6. ☕☕ Dimostrare che la successione $e_n : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è strettamente crescente e limitata. (Suggerimento: per la monotonia saranno utili il Binomio di Newton e la disuguaglianza di Bernoulli [*cfr. es.* 3.9]. Per la limitatezza si utilizzino opportune maggiorazioni).

Esercizio 1.7. Argomentare la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ e calcolarne il valore mediante le somme parziali.

Esercizio 1.8. Utilizzando le somme parziali, calcolare la somma della serie $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4n+3}$

Esercizio 1.9. Dimostrare che la successione $a_n : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}$ definita da $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ è limitata ma non ha limite.

Esercizio 1.10. ☕ Dimostrare tramite confronto e opportune maggiorazioni che la serie armonica diverge.

Esercizio 1.11. ☕☕ Dopo aver dimostrato che la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ converge, dare una stima superiore della sua somma.

Esercizio 1.12. ☕ Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza della serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(k+4)!}{k!(k+7)^{\alpha}}$

Esercizio 1.13. Si consideri la successione $a_k = \{-3, 1, -2, -3, 1, -2, \dots\}$. La serie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{(k+1)^8}$ converge o diverge?

Esercizio 1.14. Studiare la convergenza della serie $\sum\limits_{n=11}^{+\infty} e^{-nx}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$ e calcolarne la somma per $x = 2$.

Esercizio 1.15. ☕ Studiare la convergenza delle seguenti somme al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, e calcolarne successivamente il valore (per quelle finite calcolarne la somma *anche* nel limite di $n \to +\infty$).

(a) $\sum\limits_{k=10}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{\left(\ln(\alpha)\right)^{k-6}}$ (b) $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-2}\right)^k$ (c) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln^k\left(\frac{\alpha^2-4}{3-\alpha}\right)$ (d) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{|1-x|}{1+|x|}\right)^k$ (e) $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{\pi^e}{e^{\pi}}\right)^{\alpha k}$

Esercizio 1.16. ☕☕☕☕ Studiare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a \ln^b(n)}$

Esercizio 1.17. ☕☕ Sia $p \in \mathbb{N}, p > 1$. La disuguaglianza $\sum_{k=1}^{p} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^2$ è vera o falsa?

Esercizio 1.18.* ☕ Sia $f(x) = \sum_{i=1}^{1000} \frac{x^i}{i}$. Calcolare $1 + 2f'(3)$ e rappresentare il risultato nella forma di una potenza intera di 3.

Esercizio 1.19. ☕☕ Utilizzando opportune maggiorazioni e/o il confronto con la serie geometrica o la serie armonica, argomentare la convergenza o la divergenza delle seguenti serie.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k} + 3k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2^k}{k^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2(k)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} + 1}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\ln(n)}{3^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$

Esercizio 1.20. ☕☕ Dare una semplice stima superiore alle somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{ne^{-3n^2}}{4^n(4n^2+1)}$

Esercizio 1.21. ☕☕ Stimare le somme

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}} \ln\left(2e^{-k-k^2} + 1\right) e^{-3k} 2^{-k}$$

Esercizio 1.22.* ☕☕ Dimostrare la disuguaglianza

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\ln(k^3+1)}{4^k(k^3+1)} < \frac{\ln(2)}{6}$$

(**Nota:** in esercizi di questo tipo la maggiorazione che si ottiene può anche essere migliore di quella fornita. Si argomenti sempre esaustivamente.)

Esercizio 1.23. ☕ Dimostrare le disuguaglianze

(a) $\displaystyle\frac{n^6}{e^{20n^4}} \leq e^{-20}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\frac{x^6}{e^{20x^4}} \leq \frac{3\sqrt{30}}{800} e^{-3/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} 3^{k-1} \frac{2^{k+1}}{10^k + 7^{\sqrt{k}}} \leq 0.6$

Esercizio 1.24.* ☕ Dimostrare la disuguaglianza

$$\frac{n^3}{e^{27n}} \leq \frac{1}{e^{27}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e mostrare successivamente che

$$\sum_{n=300}^{+\infty} \frac{n^3}{e^{27n+3n}} \leq \frac{27000000}{e^{9000}} \frac{1}{1 - e^{-3}}$$

Esercizio 1.25.* ☕☕ Dimostrare la disuguaglianza

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^n} < \frac{3}{2} + \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

Esercizio 1.26.* Dimostrare la seguente disuguaglianza.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \sqrt{\frac{e^k-1}{e^{5k}}} < \frac{2}{e^2-2}$$

Esercizio 1.27. Dimostrare la seguente disuguaglianza.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n^2+2n}$$

Esercizio 1.28.* Dimostrare la disuguaglianza e l'uguaglianza.

$$\sum_{n=5}^{+\infty} n^3 e^{-n^2-2n} \leq \max_{\mathbb{N}\cap[5,+\infty)} \left\{n^3 e^{-n^2}\right\} \sum_{n=5}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{125}{e^{35}-e^{33}}$$

Esercizio 1.29.* Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la successione $a_n = 9\sqrt{n+1} - 3n$. Trovare, argomentando, $\max_{\mathbb{N}}\{a_n\}$.

Siano ora $X_1 = \mathbb{Q}^+ \cup [-1,1]$ e $X_2 = \mathbb{Q} \cap (-1,1) \setminus \{0\}$, e si consideri $a_n : X_k \to \mathbb{R}$, per $k = 1,2$. Determinare (se esistono) $\max_{X_k}\{a_n\}$ e $\min_{\mathbb{Q}^+}\{a_n\}$.

Esercizio 1.30.* Sia $X = \mathbb{Q} \cap \left(\mathbb{N} \setminus \{0;1\}\right)$. Dimostrare le seguenti disuguaglianze.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^n} e^{n-n^2} \leq \frac{1}{6} \max_{X} \left\{n e^{n-n^2}\right\} \geq \frac{1}{27}$$

Esercizio 1.31.* Dimostrare la disuguaglianza

$$\sum_{n=2}^{500} n^2 e^{-n^2} < \frac{1}{e-1}$$

Esercizio 1.32.* Per quali valori naturali di k è vera la disuguaglianza $\sum_{n=k+1}^{+\infty} 4^{-\frac{n}{k}} < \frac{1}{3}$? Argomentare esaustivamente.

Esercizio 1.33.* Per quali valori naturali di k è vera la disuguaglianza $\sum_{n=k}^{+\infty} 3^{-\frac{n}{k}} < \frac{1}{2}$? Argomentare esaustivamente.

Esercizio 1.34.* Per quali valori naturali di k è vera la disuguaglianza $\sum_{n=k}^{+\infty} 2^{-\frac{n}{k+1}} \leq 2$? Argomentare esaustivamente.

2. Topologia in $\mathbb{R}$.

Attenzione : *se non specificato diversamente*, gli insiemi dati sono sempre sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; le richieste sulla chiusura, limitatezza, compattezza etc. sono anch'esse da intendersi in $\mathbb{R}$.

Alcune notazioni. Dato un insieme A, si denota con

- $\mathrm{int}(A)$ la parte interna di A, ossia l'insieme dei punti interni di A. (A volte anche denotato con $A°$).
- $\overline{A}$ la chiusura di A, ossia il più piccolo insieme chiuso contenente A.
- ∂A la frontiera di A.

Esercizio 2.1. *Da insiemi a intervalli.* Esprimere i seguenti insiemi come intervalli. Utilizzare, quando necessario, unioni, intersezioni et cetera.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x+5| > 8\}$

(b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} : |x-2| - \dfrac{4}{x} < 0\right\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : \ln(|x|) - 4 < 0)\}$

(d) $D = \left\{x \in \mathbb{Z} : \dfrac{|2-x|}{(10-x)(5+x)} \geq 0\right\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R}^+ : \ln^2(x^2-2) + \ln(x^2-2) \leq 1\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} : \sqrt{x} = \ln(x)\}$

Esercizio 2.2. ☕☕ Si familiarizzi con i concetti di maggiorante, minorante, sup, inf, max e min determinandoli, quando esistono, per ognuno dei seguenti insiemi.

(a) $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$

(b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(c) $A = \left\{\dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(d) $B = \left\{\dfrac{2n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$

(e) $C = \left\{(-1)^n \dfrac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n > 0\right\}$

(f) $E = \{|x| : x^2 + x < 2, x \in \mathbb{R}\}$

(g) $F = \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, n \in \mathbb{N},\ n > 1\right\}$

(h) $G = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(3 - \frac{2}{n},\ 4\right)$

(i) $H = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n},\ 2 - \frac{1}{n}\right]$

(j) $K = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \frac{1}{n},\ 1 + \frac{1}{n}\right]$

(k) $L = \left\{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

(l) $M = \left\{x + \dfrac{5}{x},\ x \in \left(\mathbb{N} \setminus \{0\}\right) \cup (0,2)\right\}$

Esercizio 2.3. ☕ Determinare sup, inf, max e min per i seguenti insiemi.

$$D = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \qquad D' = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$$

Esercizio 2.4. Riflettere sulle seguenti affermazioni: $\sup\{\emptyset\} = -\infty$, $\inf\{\emptyset\} = +\infty$. Argomentare se siano plausibili o false.

Esercizio 2.5. ☕ Trovare, se possibile, dei sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}$ per i quali valgano (separatamente) le seguenti condizioni:

(a) $\partial A \cup \partial B \not\subseteq \partial(A \cup B)$

(b) $\partial(A \cap B) \not\supseteq \partial A \cap \partial B$

Esercizio 2.6.* ☕ Determinare $\sup(X), \inf(X)$ per $X = \{x \in \mathbb{R} : x^3 < x\}$.

Esercizio 2.7. ☕ Trovare $\sup(V)$ e $\inf(V)$ per $V = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}\right\} \subset \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.8. ☕☕☕ Dimostrare che ogni insieme finito ammette massimo e minimo.

Esercizio 2.9. ☕☕ Utilizzando le successioni, mostrare che $A = (0,1)$ non è compatto.

Esercizio 2.10. ☕☕☕☕ Dimostrare che $(0,1)$ è omeomorfo a $(0,+\infty)$ (ossia che esiste un omeomorfismo tra questi due insiemi; un omeomorfismo è una funzione continua, invertibile con inversa continua).

Esercizio 2.11. ☕ Determinare esplicitamente l'insieme $\min\left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid 3x \leq 2x^2 + \alpha \text{ è soddisfatta } \forall x \in \mathbb{R}\right\}$.

Esercizio 2.12. $\mathbb{N}$ è aperto o chiuso in $\mathbb{R}$? E $\mathbb{N} \setminus \{0\}$?

Esercizio 2.13. Si mostri che $\mathbb{Q}$ non è chiuso e non è aperto in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.14. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è aperto in $\mathbb{R}$?

Esercizio 2.15. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$?

Esercizio 2.16. Si mostri che l'insieme vuoto è sia chiuso che aperto in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.17. Mostrare che ogni insieme della forma $[a,+\infty)$, per $a \in \mathbb{R}$, è chiuso.

Esercizio 2.18. ☕ Si dica quali tra gli insiemi dell'esercizio 2.2 sono aperti/chiusi.

Esercizio 2.19. Per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ risulta chiuso l'insieme $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{b\}$?

Esercizio 2.20.* ☕☕ Utilizzando le successioni, mostrare che $E = [0,1]$ è un insieme chiuso.

Esercizio 2.21. ☕ Sia $B = \left\{e^{-x} : x \in \mathbb{R}\right\}$ un insieme. Quale tra $B \cup [-2,0]$ e $B \cap [-2,0]$ è un insieme compatto?

Esercizio 2.22.* ☕☕ Argomentando, stabilire se l'insieme $X = (-\pi,\pi) \subset \mathbb{Q}$ è aperto o chiuso in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2.23. ☕☕ Si consideri l'intervallo $\alpha_n = \left(n + \frac{1}{2},\ 2n+1\right)$ al variare di $n \in \mathbb{N}$.

(a) Stabilire quale tra gli insiemi $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ e $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$ è aperto, motivando esaurientemente.

(b) Determinare successivamente $A \cap B$ e $A \cup B$.

(c) Stabilire l'esistenza o meno di una funzione $f : A \to B$ e di una funzione $g : B \to A$, motivando la risposta.

Esercizio 2.24. ☕ Si consideri l'intervallo $\beta_n = \left[\frac{1}{n}, 2^n\right]$ al variare di $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Stabilire quale tra gli insiemi $F = \bigcap_n \beta_n$ e $G = \bigcup_n \beta_n$ è chiuso, motivando.
Proporre successivamente, argomentandone l'esistenza, un esempio di una funzione $f : F \to G$ e un esempio di funzione $g : G \to F$.

Esercizio 2.25. ☕ Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali non nulli, e sia $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(2 - \frac{2}{n},\ 4 + 2^{-n}\right) \subset \mathbb{R}$.
Tutti i sottoinsiemi chiusi di X sono chiusi di $\mathbb{R}$? Argomentare.

Esercizio 2.26. ☕ Determinare la chiusura e la frontiera di $C = \left(\mathbb{Q} \cap (-1,1)\right) \cup \mathbb{N}$.

Esercizio 2.27. ☕☕ Per l'insieme $\Omega = \left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right)^+ \cup [1,2]$ determinare sup, inf, max, min, la chiusura, l'insieme dei punti interni e di accumulazione. Trovare infine $\partial\Omega$.

Esercizio 2.28.* ☕☕ $(0,1) \cup \mathbb{N}$ è chiuso?

Esercizio 2.29. $\mathbb{Q} \cup (0,1)$ è compatto?

Esercizio 2.30. ☕ $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è compatto?

Esercizio 2.31. $A = \left\{n^2 - n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ è chiuso?

Esercizio 2.32. L'insieme K, formato dai punti di accumulazione di $\mathbb{N}$, è aperto?

Esercizio 2.33. Si trovino i punti di frontiera e di accumulazione di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 2.34.* ☕☕ Trovare tutti i punti interni del sottoinsieme $\mathbb{Q} \cap \left\{x \in \mathbb{R} : x \ln(x^2+1) < e\right\}$ di $\mathbb{R}$. Argomentare.

Esercizio 2.35. ☕ Argomentare la compattezza dell'insieme $B = \left\{|x + e^{-x}| < 1\right\}$.

Esercizio 2.36. Trovare ∂S per l'insieme $S = (-\infty, -1] \cup (1,2) \cup \{3\}$. Trovare poi tutti i punti di accumulazione.

Esercizio 2.37.* ☕☕ $B = \left\{\frac{\ln(n)}{n} : n \in \mathbb{N},\ n > 0\right\}$ è compatto?

Esercizio 2.38. ☕☕ Trovare i punti di accumulazione, isolati, interni e di frontiera per

$$M = \big((0,2) \cap \mathbb{Q}\big) \cup \big((1,3) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\big) \cup \mathbb{N}$$

Esercizio 2.39.* Determinare in $\mathbb{R}$ la frontiera dei seguenti insiemi.

(a) $A = \left\{2(-1)^n + \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $B = \left\{(-1)^n\left(1 + \frac{2}{3^n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

(c) $C = \left\{(-1)^n \frac{n^2+1}{2n^2+3} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Trovare successivamente $\overline{C}$.

Esercizio 2.40. Determinare la parte interna e la frontiera di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Esercizio 2.41. Determinare la parte interna e la frontiera di $\mathbb{R} \setminus \big((1,2) \cup \{3;4\}\big)$.

Esercizio 2.42. ☕ Determinare $\overline{\mathbb{Q}}$ e $\operatorname{int}\left(\mathbb{Q}\right)$, argomentando.

Esercizio 2.43. ☕ Sia $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\right\}$. Si provino le seguenti affermazioni *utilizzando le definizioni.*

(a) La parte interna di A è vuota.

(b) La chiusura di A è $A \cup \{0\}$.

(c) $\partial A = A \cup \{0\}$.

Esercizio 2.44. ☕ Per l'insieme $A = \mathbb{Q} \cap (0,1)$, si determini in $\mathbb{R}$

(a) La parte interna.

(b) La frontiera.

(c) L'insieme dei punti di accumulazione.

(d) L'insieme dei punti isolati.

(e) Se A è limitato, chiuso, aperto.

(f) Un insieme chiuso, ma non il più piccolo, che contiene A.

Esercizio 2.45. ☕☕ Sia X un insieme. La frontiera della frontiera di X coincide con la frontiera di X oppure è sempre un suo sottoinsieme? Rispondere alla domanda utilizzando la definizione insiemistica di frontiera di un insieme. Esibire successivamente un esempio a quanto dimostrato.

Esercizio 2.46.* ☕ Indicare se i seguenti insiemi sono limitati, aperti, chiusi. Si trovino i loro punti di accumulazione.

(a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ln(x) = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 0\right\}$ (b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - \frac{1}{n} = 0,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0\right\}$

Esercizio 2.47. ☕☕☕☕ In $\mathbb{R}$ Euclideo sia A l'insieme di tutti i numeri reali che si possono scrivere in base 10 senza l'uso della cifra 4. Dire se A è aperto e/o chiuso.

Esercizio 2.48. ☕☕☕☕ Si consideri $\mathbb{Q}$ equipaggiato con la distanza $d(p,q) := |p-q|$. Sia $A = \left\{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\right\}$. Si mostri che A è chiuso e limitato ma non è compatto.

Esercizio 2.49. ☕☕ *Teorema di caratterizzazione dei chiusi.* Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se comunque si prenda una successione $a_n : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{Z}$ e tale che $\left\{a_n\right\} \subseteq E\ \forall n \in D$ convergente in E, si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \in E$. Dimostrare questo Teorema.

Esercizio 2.50.* ☕☕ Per ognuno dei seguenti insiemi, si dica se $x = 1$ è loro punto interno oppure no.

(a) $X_1 = \left\{x \in (0,2] : e^{x^2-1}\sqrt{2-x} \geq \ln(x)\right\}$

(b) $X_2 = \left\{x \in \left(0, \frac{4}{3}\right] : e^{x-1}\sqrt{4-3x} \geq \ln\left(\frac{e}{x}\right)\right\}$

(c) $X_3 = \left\{x \in (0,2] : (x-1)e^{x+1}\ln(x) \leq \sqrt{3-x}\right\}$

Esercizio 2.51. ☕☕☕ Sia $X \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici 2×2 simmetriche i cui autovalori sono tutti di modulo strettamente minore di 1.

(a) Si dica se X è aperto in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Si dica se X è chiuso in $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2.52. ☕☕☕ *L'insieme di Cantor.*
Si consideri l'insieme $S = [0,1]$ a cui viene tolto il terzo centrale, ottenendo così l'insieme $S_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
Si iteri il processo per ottenere $S_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.
Si iteri il processo n volte, ottenendo S_n.

Si chiama *insieme di Cantor* l'insieme $C = \bigcap\limits_{n\geq 1} S_n$.

(a) Si dimostri o si confuti la seguente affermazione: C è compatto.

(b) Mostrare che la parte interna di C è vuota.

(c) Mostrare che C contiene infiniti punti.

(d) Calcolare la lunghezza totale degli intervalli *rimossi*, nel limite di $n \to +\infty$.

3. Funzioni di variabile reale.

Pre-requisiti. Conoscenza delle proprietà e dei grafici delle funzioni elementari e riconducibili a elementari, loro definizione e struttura; continuità, derivabilità, monotonia, iniettività, suriettività, invertibilità, convessità. Principali Teoremi del Calcolo Differenziale: Teorema di Weierstrass, Teorema della permanenza del segno, Teorema degli zeri, Teorema dei valori intermedî, Teorema di Rolle, di Lagrange, di Fermat; Teoremi varî sui limiti (Hôpital-Bernoulli, forme indeterminate, limiti notevoli).
Il corso non tratta le funzioni goniometriche.

Dove non specificato, ogni funzione è da intendersi ben definita sul suo dominio naturale.

Esercizio 3.1. Dimostrare che ogni polinomio di grado dispari a coefficienti reali ha almeno una radice reale.

Esercizio 3.2. $f : \mathbb{R}^+ \to (1, +\infty)$ definita da $f(x) = x^6 + 1$ è ben definita? È iniettiva?

Esercizio 3.3. Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definita come $f\left(\frac{m}{n}\right) = m$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. f è ben definita? È continua?

Esercizio 3.4. Sia $f : A \to B$ la funzione definita da $f(x) = 2\sqrt{|x| + 1}$. Determinare A, B affinché f sia

(a) Suriettiva e non iniettiva.

(b) Non suriettiva e iniettiva.

(c) Non suriettiva e non iniettiva.

(d) Invertibile.

Esercizio 3.5. Dimostrare la disuguaglianza $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \geq 0$.

Esercizio 3.6. ☕ Dimostrare la disuguaglianza triangolare: $|x + y| \leq |x| + |y|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.7. *Arithmetic Mean-Geometric Mean.* Una delle disuguaglianze più importanti in ambito matematico ed economico è la "AM-GM", e stabilisce

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{1}{2}\big(x_1 + x_2\big), \qquad \forall x_1, x_2 \geq 0$$

Si dimostri tale disuguaglianza.

Esercizio 3.8. ☕☕☕ Utilizzando le somme geometriche, si dimostri la *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in (-1, +\infty)$$

Esercizio 3.9. Dimostrare che l'equazione $x = \ln(x)$ non ha soluzioni reali.

Esercizio 3.10.* ☕☕ Si consideri la funzione polinomiale $p(x) = x^5 - 3x + 1$. Giustificando appropriatamente, stabilire quante radici reali ammette l'equazione $p(x) = 0$, e stabilire quante di esse appartengono all'intervallo $[1, 2]$.

Esercizio 3.11. Mostrare che l'equazione $4x^3 + 6x^2 + 5x = -7$ ammette una unica soluzione reale.

Esercizio 3.12. ☕ Determinare tutte le soluzioni reali dell'equazione $|1 - x| \ln\big(x^2 - |x|\big) = 0$.

Esercizio 3.13.* ☕☕ Mostrare che l'equazione $\ln^3|x| = x$ ha esattamente tre soluzioni reali.

Esercizio 3.14. ☕☕ Si considerino $\alpha \in (0, 1)$ e la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - \alpha x \ln(1 + x)$. Si dimostri che per ogni $\lambda > 0$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ammette al massimo una soluzione reale.

Esercizio 3.15. ☕☕☕ Si consideri la funzione reale $f : D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^x$, dove $D \subset \mathbb{R}$. Il dominio di questa funzione è l'insieme $D = (0, +\infty)$.
Si osservi ora che il punto $p = -2$ è un punto in cui f è definita, e si ha $f(-2) = \frac{1}{4}$, ma $-2 \notin D$. In particolare esiste un insieme $A = \{p \in \mathbb{R} \setminus D : f(p) \in \mathbb{R}\}$ costituito di (infiniti) tali punti.
Come si spiega il fatto che questo insieme infinito di punti non fa parte del dominio della funzione, nonostante essa sia ivi definita?
Si determini in seguito l'insieme A.

Esercizio 3.16. ☕☕ Si consideri la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^{\frac{x^2-4}{x}}$$

$f(x)$ è iniettiva? Si stabilisca il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 16$.

Esercizio 3.17. Argomentare l'esistenza di $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

Esercizio 3.18. Argomentare l'esistenza di $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, dove $f(x) = \begin{cases} -x^4, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Esercizio 3.19. ☕ *Teorema di Weierstrass.* Riflettere sul significato di *condizione sufficiente* e *condizione necessaria.*

(a) Esibire, se possibile, un esempio di funzione continua, su un intervallo limitato, che non ha né minimo né massimo.

(b) Esibire, se possibile, un esempio di funzione definita su un intervallo chiuso e limitato che non ha né minimo né massimo.

Esercizio 3.20. ☕ Stabilire se è vera la disuguaglianza $\pi^e > e^\pi$ senza utilizzare approssimazioni o calcolatori. (Suggerimento: aiutarsi con lo studio della funzione $f(x) = x^{1/x}$).

Esercizio 3.21. ☕ Siano $1 \le p < +\infty$, $a \ge 0, b \ge 0$. Si provi che $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Esercizio 3.22. ☕☕ Sia $0 < s < 1$. Si mostri che $f(x) = \frac{1-s^x}{x}$ è funzione decrescente per $x > 0$.

Esercizio 3.23. Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (4x+3)e^{1/x}$. Si determini $f(\Omega)$ e il numero di soluzioni della equazione $f(x) = \lambda$ per ogni λ reale.

Esercizio 3.24. ☕☕ Sia A un insieme aperto e non chiuso. Sia $f : A \cup \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \ln\left(2 + xe^{-|x|x}\right)$$

(a) Mostrare che $A \subset (-1, 0]$.

(b) Mostrare che $\exists x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = 0$.

(c) Si determini $\sup\limits_{A} \{f(x)\}$ e $\max\limits_{A\cup\mathbb{R}^+} \{f(x)\}$.

Esercizio 3.25.* ☕☕ Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ definita nel suo dominio. Dedurre successivamente la disuguaglianza $\ln(1+x) \le x$, $\forall x \ge 1$.
Stabilire in seguito la disuguaglianza

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(1+n)}{(n+1)^2 3^n} \le \frac{1}{2}$$

Esercizio 3.26.* ☕☕ Studiare l'andamento della funzione $f(x) = xe^{-x/2}$ definita nel suo dominio. Dedurre successivamente la disuguaglianza $x < e^{x/2}$, $\forall x \ge 1$.
Stabilire in seguito la disuguaglianza

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n\sqrt{e^n}}{3^n} < \frac{3}{3-e}$$

Esercizio 3.27. Sia A l'insieme contenente tutti gli zeri della funzione $f(x) = 3x^2 - 2^x + \ln\left(x^5 - 2x\sqrt{|x|} + 18\right)$. A è compatto? Perché? La funzione $f : A \to \{0\}$ è continua? Argomentare.

Esercizio 3.28. $f : (0,2] \to [-5,7]$ definita da $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ è ben definita? È continua?

Esercizio 3.29. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definita da $f(x) = \begin{cases} \pi, & x > \pi\sqrt{2} \\ 2\pi, & x < \pi\sqrt{2} \end{cases}$ è continua?

Esercizio 3.30. $f : \{0;1\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \ne 0 \end{cases}$ è continua? Argomentare.

Esercizio 3.31. Si trovino tutti i punti in cui f è continua, dove f è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{p}{n},\ p, n \in \mathbb{Z},\ p, n \text{ co-primi} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

(Si ricorda che due numeri si dicono co-primi se il loro massimo comun divisore è 1).

Esercizio 3.32.* Sia $A \subset \mathbb{R}$ l'inseme

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{3n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

e sia $f : R \to R$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ \frac{x}{3} + 2, & x \notin A \end{cases}$$

Stabilire, argomentando esaustivamente, se f è continua nei punti di frontiera di A non appartenenti ad A.

Esercizio 3.33. Proporre una funzione continua ovunque eccetto che in $(0,1)$, costante nel suo dominio, oppure giustificarne l'inesistenza.

Esercizio 3.34. Proporre una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua in $[0,1]$ e tale che $f\big([0,1]\big) = (0,1]$, oppure argomentarne l'inesistenza.

Esercizio 3.35.* Sia $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n^2+1}{2n^2+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente condizione

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) = 0, \quad \forall x \in A$$

(a) Se f è continua, dimostrare che $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

(b) Proporre un esempio di funzione f discontinua che soddisfi la condizione definita precedentemente, e tale che $f\left(\frac{1}{2}\right) \ne 0$

Esercizio 3.36.* Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $E = \left\{x \in \mathbb{R} : h(x) \ne e\right\}$. Si stabilisca, argomentando, se è continua la funzione $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$k(x) = \begin{cases} 20, & h(x) > e \\ 21, & h(x) < e \end{cases}$$

In che modo il risultato dipende dall'insieme E? Argomentare la risposta sviluppando degli esempi opportuni.

Esercizio 3.37. ☕☕☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dimostrare che f è continua per ogni $x \in (0,1) \cap \big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)$ mentre è discontinua per ogni $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Esercizio 3.38.* ☕ Sia f una funzione reale definita sull'intero asse reale e tale che $\lim\limits_{h\to 0} \big(f(x+h) - f(x-h)\big) = 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Si può concludere che f è continua? Perché?

Esercizio 3.39.* ☕☕ Sia $A \subset \mathbb{R}$ l'insieme

$$A = \left\{ \frac{\big(\sqrt{2}\big)^{4n}}{(-4)^n + n^4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \in A \\ 3, & x \notin A \end{cases}$$

Trovare, argomentando per la definizione, tutti i punti di R in cui f è continua.

Esercizio 3.40. ☕☕ Sia f una funzione tale che $f^{-1}\big((0,2)\big) = [0,2)$. Dire se f è continua o no, spiegando bene.

Esercizio 3.41.* ☕ Trovare tutti i valori di a reale che rendono continua su $\mathbb{R}$ la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x, & x+2 < e^x \\ a, & x+2 \geq e^x \end{cases}$$

Esercizio 3.42. ☕☕☕ Sia A l'insieme

$$\left\{ \frac{1+n^3}{3+\sqrt{n}e^n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ 2x, & x \notin A \end{cases}$$

(a) Stabilire, argomentando per la definizione di continuità, se f è continua nel punto 0.

(b) Stabilire, argomentando per la definizione di continuità, se f è continua nel punto $\frac{1}{3}$.

Esercizio 3.43.* ☕☕☕ Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante l'espressione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(a) Utilizzando la definizione di continuità, argomentare se f è continua nei punti interni di A (qualunque esso sia).

(b) Utilizzando la definizione di continuità, argomentare se f è continua nei punti di frontiera di A (qualunque esso sia).

Esercizio 3.44. La funzione $x^2|x|$ è derivabile in $\mathbb{R}$?

Esercizio 3.45. La funzione $\sqrt{|x|}$ è derivabile in $x = 0$?

Esercizio 3.46. La funzione $|x|e^{-|x|}$ è derivabile in $\mathbb{R}$?

Esercizio 3.47. La funzione $\ln\big(1+|x-1|\big)$ è derivabile in $x=1$?

Esercizio 3.48. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $|x|^\alpha \sqrt{|x|}$ è derivabile in $\mathbb{R}$?

Esercizio 3.49. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \le 0 \\ x^2 \ln(x), & x > 0 \end{cases}$$

Stabilire, mediante la definizione di derivata, se esistono valori di a affinché f risulti derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.50.* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile ovunque. Si trovino a, b reali in modo che sia derivabile ovunque la funzione

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.51. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione ovunque differenziabile, si calcoli $g'(x)$ se $g(x) = f\big(e^{f(f^2(x))}\big)$.

Esercizio 3.52.* Si calcoli $f'(0)$ per $f(x) = \big(x^{17} + 17^x\big)\ln\big(e^{17x^2} + \sqrt{17x+17} + 17\big)$.

Esercizio 3.53. ☕ Dimostrare che tra due radici consecutive di un polinomio $p(x)$ giace una radice di $p'(x)$.

Esercizio 3.54. ☕☕ Sia $f : \{0\} \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$.

(a) f è continua nel suo dominio? Motivare.

(b) Esiste $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? In caso affermativo calcolarne il valore.

(c) f è differenziabile nel suo dominio? Argomentare pienamente.

(d) Come cambiano, se cambiano, le precedenti risposte se $f : \{0\} \cup (2,3) \to \mathbb{Q}$?

Esercizio 3.55. Determinare i punti di non derivabilità (mostrando successivamente la non derivabilità in tali punti) della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \max\{x, x^2\}$.

Esercizio 3.56.* ☕☕ Utilizzando la definizione di derivabilità, data $f(x) = |x|^3$ si mostri che $f'''(0)$ non esiste. (Suggerimento: iterare la definizione di limite del rapporto incrementale).

Esercizio 3.57.* ☕ Si calcoli il valore di $f'(0)$ per $f(x) = \ln\left(1 + \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}\right) + x^2 g(x)$, definita per $x \ge -1$, dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione non derivabile, e tale che $|g(x)| < 2025,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.58.* ☕☕ Per $x \in \mathbb{R}$, calcolare, se possibile, il valore di $f'(1)$ per la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} + (x-1)^2 g(x), \qquad \text{dove} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 18, & x \in \mathbb{Q} \\ 19, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esercizio 3.59.*☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale con la proprietà che f' è limitata. Per un certo $\varepsilon > 0$ si definisca la funzione $g_\varepsilon(x) = x + \varepsilon f(x)$. Si dimostri che g_ε è iniettiva se ε è sufficientemente piccolo.

Esercizio 3.60. ☕☕☕ Sia f una funzione continua e differenziabile su $\mathbb{R}^+$, tale che $f(0) = 0$ e f' è crescente su $\mathbb{R}^+$. Mostrare che la funzione

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

è crescente su $\mathbb{R}^+$. (Suggerimento: coinvolgere il Teorema di Lagrange nel ragionamento.)

Esercizio 3.61. ☕☕ Sia f una funzione continua in $[0,2]$, differenziabile in $(0,2)$, tale che $f(0) = f(2) = 1$ e con derivata in modulo strettamente inferiore a uno. Dimostrare che $f(x) \ge 0$ nell'intervallo $(0,2)$.

Esercizio 3.62. ☕ Sia $h : [-11, 11] \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $h(-11) = -11$ e $h(11) = 11$. Si abbia inoltre $h'(x) \leq 1$, $\forall x \in [-11, 11]$. Concludere che $h(x) = x$ per ogni x. (Suggerimento: considerare $g(x) = x - h(x)$).

Esercizio 3.63.* ☕☕ Sia $f(x)$ è una funzione differenziabile ovunque e sia $g(x) = f(x)e^{-|x|}$ una funzione ben definita. Argomentando bene con la definizione di derivata, mostrare che $g(x)$ è differenziabile in $x = 0$ se e solo se $f(0) = 0$.

Esercizio 3.64. ☕☕ Sia $f(x)$ una funzione due volte differenziabile, e si sappia che $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Si dimostri che $\forall x > 0$ si ha $f(x+2) - f(x) < f(x+5) - f(x+3)$.

Esercizio 3.65. ☕☕☕ Sia f una funzione almeno due volte differenziabile con $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \to 0$. Si dimostri che l'equazione $f''(x) = 0$ ha almeno tre soluzioni reali.

Esercizio 3.66.* ☕ Data f funzione reale e differenziabile in $x \in \mathbb{R}$, utilizzando la definizione di limite e la definizione di derivata si trovi

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

Si svolga successivamente un esempio utilizzando la funzione $f(x) = x^2$.

Esercizio 3.67. ☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sapendo che $f(17) = 1 + \sqrt{2\pi}$ e $f'(17) = 3\pi + 2$

(a) Utilizzando la migliore approssimazione lineare locale di f intorno al punto 17, calcolare un valore approssimato di $f\left(\frac{171}{10}\right)$.

(b) Mostrare che $f\left(\frac{171}{10}\right) > 4.1$.

(c) Argomentare la possibilità di determinare se $f''(17)$ sia positiva o negativa, oppure esibire un controesempio a tale possibilità.

Esercizio 3.68.* ☕☕☕ Sia $A = \left\{\frac{\ln(n)}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} \subset \mathbb{R}$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in A \\ 2x^2, & x \notin A \end{cases}$$

(a) f è continua nel punto $x = 0$? Perché? f è continua nel punto $x = 1$? Perché? Argomentare per la definizione.

(b) f è differenziabile nel punto $x = 0$? E nel punto $x = 1$? Perché? Argomentare per la definizione.

Esercizio 3.69. ☕☕ *Comprensione della composizione tra funzioni.* Siano $f : \Omega \to B$, $g : \Lambda \to K$ due funzioni. Supponiamo di voler determinare la composizione $(f \circ g)(x)$, altresì denotata come $f(g(x))$.

(a) È necessaria e/o sufficiente la condizione $g(\Lambda) \subseteq \Omega$? Motivare.

(b) Riflettere sulla seguente affermazione: "*$g(\Lambda) \subseteq K$ implica o equivale a $K \subset \Omega$*".

(c) Considerare ora le seguenti funzioni

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g(n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{e} \qquad f : \{1; 2; 3\} \to \mathbb{N}, \quad \text{tale che} \begin{cases} f(1) = 17 \\ f(2) = 0 \\ f(3) = 1729 \end{cases}$$

(c.1) Si determini $g(\mathbb{N})$.

(c.2) Mostrare che $(f \circ g)$ è ben definita, e determinare la sua espressione.

(c.3) Analizzare le due risposte precedenti in merito alla affermazione del punto (b).

Esercizio 3.70. *Derivazione simbolica.* Si familiarizzi col processo di derivazione su funzioni simboliche, ossia la cui espressione non è esplicita. Si determini $f'(x)$ per ognuna delle seguenti, sapendo che tutte le funzioni che appaiono sono ben definite e differenziabili nei loro rispettivi dominî.
g, h denotano funzioni. α, p sono parametri reali non nulli.

(a) $f(x) = \big(x - g(x)\big)^2 + g\big(\sqrt{x}\big)$

(b) $f(x) = g\big(xh(x)\big) - x^2 h^2\big(x^2\big)$

(c) $f(x) = \ln\big(g(x) + h(x^{-2})\big)$

(d) $f(x) = \sqrt{h^2(x^2 - x) + x} + |1 - g(x)|$

(e) $f(x) = e^{g(1-3x)} + \alpha x^{p + h^p(x^p)}$

(f) $f(x) = f'\big(x^2 h^\alpha(x^2)\big) + \sqrt[p]{1 - g(h(x))}$

Esercizio 3.71. ☕ Sia $g : [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(t) = t\sqrt{t+2}$. Stabilire se il seguente insieme è compatto.

$$G = \left\{ g'\left(\frac{p^2}{2p+13}\right) : p \in \mathbb{N} \right\}$$

Esercizio 3.72. ☕ Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(t) = \ln\big(1 + 2\sqrt{t}\big)$. Stabilire se è chiuso l'insieme

$$F = \left\{ f'\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) : n \in \mathbb{N},\ n > 0 \right\}$$

Esercizio 3.73.* ☕ Sia $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(t) = 1 + e^{-1/t}$. Determinare in $\mathbb{R}$ la frontiera di

$$H = \left\{ h\left(\frac{e^n}{n^e}\right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Esercizio 3.74.* ☕ Sia $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione $h(t) = \frac{e^{2t} - e^t}{t}$. Si trovi con argomentazione la frontiera, in $\mathbb{R}$, dell'insieme

$$H = \left\{ h\left(\frac{1 + \ln(n)}{\ln(1+n)}\right) : n \in \mathbb{N},\ n > 0 \right\}$$

Esercizio 3.75.* ☕ Sia $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione $h(t) = t \ln\big(\sqrt{t}\big)$. Determinare in $\mathbb{R}$ la frontiera di

$$H = \left\{ h\left(\frac{n^3 + (-1)^n n^3 + n}{n^2}\right) : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$$

Esercizio 3.76. ☕ Studiare la monotonia della funzione $g(x) = x^4|x| - 3x^3 + x + 1$ nel suo dominio, e determinare $\min\limits_{[0,2]}\{g\}$. Verificare successivamente, senza usare alcun calcolatore, che $\min\limits_{[0,2]}\{g\} < 1 - \sqrt{2}$.

Esercizio 3.77. Data la funzione $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [2,3) \\ \frac{25}{4}, & x = 3 \end{cases}$$

trovare $\inf(f), \min(f), \max(f), \sup(f)$.

Esercizio 3.78.* ☕☕ Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti per la funzione

$$f : (0,3] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \ln\left(\frac{1 - e^{-x^2/2}}{x}\right)$$

Attenzione : questo esercizio richiede un buon utilizzo di alcuni Teoremi dell'analisi (quali?) e del ragionamento simbolico: poiché non sarà possibile determinare esplicitamente uno dei punti stazionarî, occorrerà mostrarne l'esistenza e determinare il più piccolo intervallo al quale esso appartiene.

Esercizio 3.79.* ☕ Per ogni λ reale, trovare il massimo assoluto di $f(x) = x^2 e^{-\lambda x^2 - 1}$ al variare di $x \in [0,2]$.

Esercizio 3.80.* Per ogni λ reale, trovare il massimo assoluto di $f(x) = \lambda x e^{x^2-\lambda}$ al variare di $x \in [0,1]$.

Esercizio 3.81. ☕ Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si trovi il massimo assoluto di $f(x) = \ln\left(1 + \lambda e^{-\lambda x^2}\right)$ per $x \in [-a, a]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.82.* ☕☕ Per ogni λ reale, trovare il minimo assoluto di $f(x) = xe^{x-x^2}$ al variare di $x \in (-\infty, \lambda]$, giustificandone l'esistenza.

Esercizio 3.83. ☕☕ Si trovino i massimi e i minimi assoluti di $f : [-3,0) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln\left(\lambda x^2 - 3x\right)$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Argomentarne l'esistenza.

Esercizio 3.84.*☕☕☕ Per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, trovare il minimo assoluto di $f(x) = xe^{\lambda x^2 - 1}$ al variare di x nell'intervallo $[-\lambda^2, \lambda^2]$ argomentando l'esistenza di tale minimo assoluto.

Esercizio 3.85.*☕☕☕ Per ogni valore del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, trovare il massimo assoluto di $f(x) = x^2 e^{\lambda x - 1}$ al variare di x nell'intervallo $\Lambda = \left[-\frac{8}{\lambda^2+3}, \frac{8}{\lambda^2+3}\right]$ argomentando l'esistenza di tale massimo assoluto.

Nel caso in cui f ammetta massimi relativi in Λ, e solo in tale caso, la risposta può essere lasciata nella forma $\max\limits_{\Lambda} f(x) = \max\left\{\phi_1(\lambda), \phi_2(\lambda)\right\}$, esplicitando ϕ_1 e ϕ_2.

Esercizio 3.86.*☕☕ Sia $f(x) = (x-\lambda)e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, dove λ è un parametro reale. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ trovare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f al variare di x nell'intervallo $[\lambda, +\infty)$ argomentando l'esistenza di tali massimo e minimo assoluti.

Esercizio 3.87.*☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x) = \rho x^2 + e^{\rho|x| - 2x}, \qquad \rho \in \mathbb{R}$$

(a) Si trovino $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ al variare del parametro ρ.

(b) Si trovino tutti i valori di $\rho \in \mathbb{R}$ per i quali f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}$, argomentando.

(c) Si trovino tutti i valori di $\rho \in \mathbb{R}$ per i quali f ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}$ e tale minimo si raggiunge in un punto appartenente a $(-\infty, 0)$. Argomentare bene.

Esercizio 3.88.*☕☕☕ Sia $g : K \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = (2+x)xe^{-x}$. Argomentandone l'esistenza, si trovi $\max\limits_{K}\left\{g(x)\right\}$ quando

(a) $K = \mathbb{R}$.

(b) $K = \mathbb{Q}$.

(c) $K = \left\{\dfrac{1+\ln(n+1)}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Esercizio 3.89.*☕☕☕ Si consideri la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{\alpha x + 1}\, e^{-(x+2)}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}^+$ è un parametro. Siano inoltre A, B i seguenti insiemi

$$M = \left\{m^2 - m \mid m \in \{1;2;3;4;5\}\right\} \qquad A = \left\{\frac{\alpha n^2 - 8n + 12}{(-1)^n \cdot n^2 + 2} \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha \in M\right\} \qquad B = \left\{36\sqrt{1+n^2} - 2n^2,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

(a) Si determinino i valori di α per i quali esiste $\max\limits_{\mathbb{R}}\{f\}$.

(b) Posto $\alpha = 1$, determinare $\max\limits_{B}\{f\}$.

(c) Si determini $D_\alpha = \partial A \setminus A$ al variare di α. Si trovino poi $\Delta = \bigcup\limits_{\alpha} D_\alpha$ e $\delta = \bigcap\limits_{\alpha} D_\alpha$

(d) Sia ora $K = \Delta \cap (-4,4)$. Si determini, per α generico, $f(K)$ e per quali α è ben definita $f : K \to \mathbb{R}$.

(e) Determinare $\max\limits_{K}\left\{f(x)\right\}$ e $\min\limits_{K}\left\{f(x)\right\}$ al variare di α.

Esercizio 3.90. ☕ Siano $D_1 = \{-7\} \cup (-5,2]$ e $D_2 = \left(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right)^+ \cup [1,2]$. Si trovino max, min, inf e sup per $f : D_1 \to \mathbb{R}$ e successivamente per $f : D_2 \to \mathbb{R}$ dove $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+5}$.

Esercizio 3.91. ☕☕☕☕ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione continua in $[a,b]$ tale che $f(a) < 0 < f(b)$. Sia

$$K = \left\{x \in [a,b] : f(x) < 0\right\}$$

e sia $s = \sup(K)$. Mostrare che $f(s) = 0$.

Esercizio 3.92.* ☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante l'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-\frac{1}{x^3}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Esiste $f'(0)$? Argomentare esaustivamente in base alla definizione sequenziale di limite.

(b) Trovare e classificare gli estremanti locali di f.

(c) Tracciare il grafico di f.

Esercizio 3.93.* ☕☕ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante l'espressione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Esiste $f'(0)$? Argomentare esaustivamente in base alla definizione sequenziale di limite.

(b) Trovare e classificare gli estremanti locali di f.

(c) Tracciare il grafico di f.

Esercizio 3.94. Si utilizzi la definizione per mostrare che $f(x) = x^2$ è una funzione convessa nel suo dominio.

Esercizio 3.95. ☕☕☕☕ Si utilizzi la definizione per mostrare che $f(x) = \log(x)$ è una funzione concava nel suo dominio.

Esercizio 3.96. Sia f una funzione concava e g una funzione convessa. Si mostri che la funzione $f - g$ è concava nel suo dominio.

Esercizio 3.97. ☕ Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, esibendo una semplice dimostrazione o fornendo un controesempio.
Siano f, g due funzioni ben definite:

(a) Se entrambe sono concave allora $f + g$ è concava.

(b) Se entrambe sono convesse allora $f \cdot g$ è convessa.

(c) Se f è convessa allora anche f^2 è convessa.

(d) Se f è concava e g è convessa, allora $g\ln(f)$ è convessa oppure $f\ln(g)$ è concava.

(e) Se f è convessa allora e^f è convessa.

Esercizio 3.98. ☕☕ Si dimostri il seguente fatto: *se f, g sono funzioni due volte differenziabili, entrambe non crescenti (o entrambe non decrescenti) ed entrambe positive, allora $f \cdot g$ è convessa.*

Esercizio 3.99. ☕☕☕ Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile con inversa $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$. Dimostrare le seguenti proposizioni:

(a) Se f è decrescente e convessa in I, allora f^{-1} è decrescente e convessa in $f(I)$.

(b) Se f è crescente in I, allora f^{-1} è crescente e concava in $f(I)$.

Esercizio 3.100.* ☕☕La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ è convessa in $[0,1]$? Argomentare la risposta utilizzando la definizione di convessità.

Esercizio 3.101. ☕☕ Si determini per quali valori reali del parametro α la funzione $f(x) = e^x - \alpha x^3$ è convessa su $(0, +\infty)$.

Esercizio 3.102.* ☕☕☕ Sia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, positiva, almeno due volte differenziabile e si sappia che vale la seguente condizione:

$$f'(x) = 2x f^2(x) \qquad (*)$$

(a) Mostrare che f è strettamente convessa in $(-1,1)$.

(b) Mostrare che f è strettamente convessa in $(-1,1)$ rimuovendo l'ipotesi della doppia differenziabilità di f.

Sia ora noto che tutte le funzioni della forma $f_a(x) = -\frac{1}{x^2+a}$ soddisfano la condizione (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(c) Per $a = 0$ quali delle precedenti ipotesi sono soddisfatte/necessarie e quali no? $f_0(x)$ è convessa in $(-1,1)$? Motivare.

(d) Per $a = -2$ quali delle precedenti ipotesi sono soddisfatte/necessarie e quali no? $f_{-2}(x)$ è convessa in $(-1,1)$? Motivare.

(e) Per $a = 2$ quali delle precedenti ipotesi sono soddisfatte/necessarie e quali no? $f_2(x)$ è convessa in $(-1,1)$? Motivare.

(f) La funzione $f_3(x)$ non è positiva eppure è convessa in $(-1,1)$. Dare una spiegazione di questo fatto.

Esercizio 3.103. ☕☕ Per ogni μ reale, trovare il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x) = \mu e^{x^2 - \mu x}$ al variare di $x \in [-1,1]$ argomentando principalmente attraverso la convessità e la concavità di f.

Esercizio 3.104.* ☕ Trovare tutti i valori di $\rho \in \mathbb{R}$ per i quali è concava in $\mathbb{R}$ la funzione $h(x) = \rho^2 x - \rho e^{|x| - \rho x}$.

Esercizio 3.105. Trovare, argomentando, i valori di ρ per i quali è convessa in $\mathbb{R}$ la funzione $g(x) = x^2 + \rho|x-1|$.

Esercizio 3.106.* ☕ Trovare i valori di $\rho \in \mathbb{R}$ per i quali è concava in $\mathbb{R}$ la funzione $g(x) = -e^{(x-1)^2} + \rho|x-1|$.

Esercizio 3.107.* ☕☕☕ Trovare i valori di λ reali per i quali è convessa in $\mathbb{R}$ la funzione $h(x) = |x| - \lambda \ln\left(|x| + 7\right)$.

Esercizio 3.108. ☕☕ Studiare la concavità della funzione $g(x) = \mu x^2 - e^{-\mu|x| - 2}$ al variare di $x \in [-1, \mu]$ per $\mu \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.109.* ☕☕ Trovare, argomentando esaustivamente, tutti i valori del parametro $\rho \in \mathbb{R}$ per cui è concava nel suo dominio la funzione non ovunque derivabile $h(x) = -\rho x^2 + \sqrt{9 - \rho|x|}$.

Esercizio 3.110.* Trovare, argomentando, i valori di ρ per i quali la funzione $h(x) = \rho|x| + e^{\rho x^2 + x}$ è convessa in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.111.* ☕ Trovare, argomentando esaustivamente, tutti i valori del parametro $\rho \in \mathbb{R}$ per i quali è concava nel suo dominio la funzione non ovunque derivabile $h(x) = \rho|x| + \ln\left(1 + \rho x^2\right)$.

Esercizio 3.112.* ☕ Trovare tutti i valori del parametro reale ρ per cui la funzione h definita mediante l'espressione $h(x) = -\sqrt{1 - \rho|x|}$ è convessa nel suo dominio. Argomentare esaustivamente.

4. Calcolo Integrale in una variabile.

Esercizio 4.1. Esercitarsi sul calcolo delle primitive.

(a) $\displaystyle\int \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$ (e) $\displaystyle\int (17x+25)^{13}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int \ln(x)\ln(2x)\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^4 |2x-x^2|\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{-2}^2 e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int_{e^\pi}^{\pi^e} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln(x)}$

Esercizio 4.2. ☕☕ Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false giustificando la risposta in modo adeguato.

(a) Se f è convessa su $[a,b]$, allora $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ è convessa su $[a,b]$.

(b) Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ è Riemann-integrabile.

(c) Se f è una funzione pari ed è integrabile, allora le sue primitive sono funzioni dispari, e viceversa.

(d) Se una funzione $f\geq 0$ su $[a,b]$ è ivi continua, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$ per ogni $x\in(a,b]$.

(e) f è una funzione integrabile e dispari. Allora $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$, con $a\neq 0$.

(f) $f:[-1,2]\to\mathbb{R}$ è funzione discontinua in $x_0\in[-1,2]$. Allora f non esiste $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(g) Se f è limitata allora è Riemann-integrabile.

Esercizio 4.3. ☕ Sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione limitata e integrabile in Ω, con Ω compatto. Si mostri che

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_\Omega f(\lambda x)\,\mathrm{d}x\to 0$$

Esercizio 4.4.* Calcolare il valore di $\displaystyle\sum_{k=1}^{100M} 5e^{-2k}$, dove $M=\displaystyle\int_0^2 \ln\left(\frac{2}{x}\right)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4.5.* Calcolare $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_1^a \big(\ln(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4.6. Calcolare $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{1/b}^1 x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4.7.* ☕ Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_1^{\sqrt{1-x}}\sqrt{x^2-x^4}\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 4.8.* ☕☕☕ Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{N}\\ e^{-x}, & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Calcolare $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ in due modi: direttamente, e utilizzando le somme di Riemann.
(Suggerimento: nel secondo caso si proceda con la definizione ottenendo una soluzione approssimata scegliendo una partizione con, ad esempio, $n=3$).

Esercizio 4.9.* ☕☕☕ Sia $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Dire se il valore di $F(-1)$ sia positivo, negativo o nullo. Si risolva l'esercizio in tre modi differenti.

Esercizio 4.10. ☕ Sia f una funzione reale, continua e differenziabile in $[a,b]$, tale che $f(a)=f(b)=0$, e tale che $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Calcolare il valore di $\int_a^b x f(x) f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4.11.* ☕ Sia $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x = a \in \mathbb{R}$. Dimostrare l'uguaglianza $\int_0^1 x e^{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1-e}{2} + a$.

Esercizio 4.12.* ☕☕☕ Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ una funzione continua. Aiutandosi con le somme di Riemann e invocando nel ragionamento la convessità, dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$\int_0^1 e^{f(x)}\,\mathrm{d}x \geq e^{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Esercizio 4.13. ☕ Verificare la seguente disuguaglianza.

$$\lim_{s\to+\infty}\int_0^s \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2 e^{-k^2-\omega}}{6^k}\,\mathrm{d}\omega < \frac{1}{5e}$$

Esercizio 4.14.* ☕ Dimostrare le seguenti disuguaglianze.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1$$

Esercizio 4.15.* ☕☕ Dimostrare la disuguaglianza

$$\int_n^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x < n e^{-n^2}$$

e calcolare, argomentando esaustivamente, $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4.16.* Calcolare

$$\left(\int_1^2 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right)\left(\sum_{n=10}^{+\infty} 10^{10-10n}\right)$$

Esercizio 4.17.* ☕☕☕ Siamo $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le funzioni definite mediante le espressioni

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{e} \qquad f(x) = e^{\frac{x}{2}-\Phi(x)}, \qquad x\in\mathbb{R}$$

Si consideri noto il fatto che $\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)$ esiste ed è finito.

(a) Si dimostri che anche $\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)$ esiste ed è finito.

(b) Si trovino i punti stazionarî di f e se ne determini la natura.

(c) La funzione f ammette massimo assoluto in $\mathbb{R}$? Ammette minimo assoluto in $\mathbb{R}$? Argomentare le risposte.

(Suggerimento: non serve una espressione analitica per la primitiva di e^{-u^2}).

Esercizio 4.18.* ☕ Sia $f(a) = \int_1^2 \frac{x^4}{ae^x+1}\,\mathrm{d}x$, dove $a\in[0,+\infty)$. Senza esplicitare l'integrale, ovvero senza cercare una primitiva della funzione integranda, dimostrare che f è una funzione decrescente di a.

Esercizio 4.19.* Per quali valori di a vale la disuguaglianza seguente?

$$\int_0^a x e^{3x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}a e^{3a} < 2$$

Esercizio 4.20.* ☕ Dimostrare che la disuguaglianza

$$\int_0^3 xe^{ax}\,\mathrm{d}x < 5$$

è soddisfatta in un intorno di $a = 0$.

Esercizio 4.21. ☕☕ Sia $F : \omega \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_1^{x^2} y^2 \ln\left(7 - 2e^{y/4}\right)\,\mathrm{d}y$$

Si trovino i punti stazionarî di $F(x)$ stabilendone la natura.

Esercizio 4.22. ☕☕ Sia $g : D \to (-1, +\infty)$ una funzione strettamente crescente su D, e sia $F : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^{g(x)} \frac{10 - e^{z^2}}{z+1}\,\mathrm{d}z, \qquad x \in D$$

Supposto noto che $g^{-1}\big(\ln(10)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

(a) Si trovino, argomentandone l'esistenza, i punti di massimo e di minimo di $F(x)$.

(b) Si mostri che $F'(0) < -445$ tramite opportune stime numeriche semplici.

5. Topologia in $\mathbb{R}^n$.

Per ogni intero $n \geq 0$, tutti i sottoinsiemi dati sono sempre sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, salvo specificato diversamente.
La notazione $\|\bullet\|$ definisce la *norma Euclidea*: per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
La notazione $\langle\ ,\ \rangle$ denota il prodotto scalare (generalmente quello Euclideo).

Infine, *per quanto non siano molto utilizzate nel corso*, sono date per conoscenza le seguenti notazioni:

- Disco unitario n-dimensionale: $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$
- Sfera unitaria n-dimensionale: $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$
- Palla aperta unitaria n-dimensionale: $\mathscr{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$

Definizione. Uno *spazio metrico* è una coppia ordinata (X, d), dove X è un insieme non vuoto (i cui elementi sono chiamati *punti*) e d è una *metrica*, ossia una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che "rappresenta" una distanza fra gli elementi di X. La distanza è una funzione che rispetta i seguenti assiomi:

1. Positività: $d(x, y) \geq 0,\ \forall x, y \in X$. In particolare $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. Simmetria: $d(x, y) = d(y, x),\ \forall x, y, \in X$.
3. Disuguaglianza Triangolare: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),\ \forall x, y, z \in X$.

Per quanto concerne il corso, i termini "distanza" e "metrica" sono utilizzati con significato equivalente. Si prenda familiarità con i concetti e le notazioni!

Esercizio 5.1. Disegnare gli insiemi $\mathscr{B}^2, \mathbb{D}^1, \mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \mathscr{B}^2 \cup \mathbb{S}^2$.

Esercizio 5.2. Spiegare che tipo di insiemi rappresentano le scritture $[0,1] \times [-1,1]$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{D}^2 \times (0,2)$ e $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Esercizio 5.3. ☕☕ Siano u, v vettori di uno spazio vettoriale V di dimensione n definito su $\mathbb{R}$. Dimostrare la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: $|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$.

Esercizio 5.4. ☕ Sia $X = \mathbb{R}$, e $(x, y) \in X \times X$. Dire se le seguenti funzioni rappresentano una distanza sullo spazio X oppure no.

(a) $D(x, y) = (x - y)^2$

(b) $\delta(x, y) = |x^2 - y^2|$

(c) $k(x, y) = |x^3 - y^3|$

(d) $\Delta(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

Esercizio 5.5. Siano d, d' delle distanza su uno spazio metrico X non vuoto. *Attraverso una semplice verifica numerica* mostrare che le seguenti funzioni non rappresentano una distanza.

(a) $\rho(x, y) = d(x, y) \cdot d'(x, y)$

(b) $\sigma(x, y) = \max\{2, d(x, y)\}$

Esercizio 5.6. ☕☕ Sia $d(x, y)$ una distanza su un insieme X. Mostrare che $h(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ è una distanza su X.

Esercizio 5.7. Per ogni $s \in [0, +\infty)$, sia $Q_s = [-s, s) \times (-s, s]$. Rappresentare ∂Q_2. È un insieme aperto?

Esercizio 5.8. ☕ Determinare la frontiera dell'insieme $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 0\} \setminus \mathbb{S}^1$ e disegnare X.

Esercizio 5.9.* ☕ Determinare ∂Y, per $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\}$.

Esercizio 5.10.* ☕☕ Per ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ si determini la frontiera e si stabilisca se è aperto e/o chiuso o altro, se è limitato o non limitato. *È istruttivo rappresentare questi insiemi.*

(a) $A_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq e^x \leq y \leq 4\}$

(b) $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$

(c) $A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x,y) - (1,3)\| < 2\right\}$

(d) $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x^2 + 2y^2 \geq 1\}$

(e) $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{x},\ y \geq -8\}$

(f) $A_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2,\ y < \frac{1}{x},\ x > 0\right\}$

(g) $A_6 = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x \leq 2,\ y \neq \ln(x)\}$

(h) $A_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 3,\ y \geq e^{|x|},\ y \geq |\ln(x)|\}$

(i) $A_8 = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < e^{2x} - 1,\ -2 < x \leq 1\}$

(j) $A_9 = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 2y^2 < 1\}$

(k) $A_{10} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0,\ 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

Esercizio 5.11.* ☕ L'insieme $B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \leq 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$? È compatto in $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 5.12. ☕ Sia σ un generico piano. Determinare $\operatorname{int}(\sigma)$ e $\partial\sigma$ per $\sigma \subset \mathbb{R}^3$. Determinare $\operatorname{int}(\sigma)$ e $\partial\sigma$ per $\sigma \subseteq \mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.13. ☕ L'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$ è compatto?

Esercizio 5.14.* ☕☕☕ $A = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : y^n = x,\ n \in \mathbb{N}\}$ è aperto? È chiuso? Motivare.

Esercizio 5.15. ☕☕ Sia X il seguente luogo di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tali che } \exists n \geq 1, n \in \mathbb{N} \mid y = 1 - e^x + \frac{1}{n}\right\}$$

Si stabilisca se X è aperto.

Esercizio 5.16.* ☕☕ Trovare in $\mathbb{R}^2$ la frontiera dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q},\ y \in [0,1]\}$.

Esercizio 5.17.* ☕ Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Determinare ∂B e l'insieme dei punti interni di B.

Esercizio 5.18. $Q = \Big([-1,1] \times [-1,1]\Big) \cap \Big([0,2] \times \{0\}\Big)$ è compatto?

Esercizio 5.19.* ☕☕ Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ il luogo definito da $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = n\}$. x è chiuso? Argomentare.

Esercizio 5.20. ☕☕☕ Determinare la chiusura e i punti di accumulazione dell'insieme

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ \frac{y}{x} \in \mathbb{N}\right\}$$

Esercizio 5.21. ☕☕☕☕ Determinare la chiusura, la frontiera e la parte interna di A in X, dove $X = \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ e

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \pi\} \setminus \{(x,y) \in X : y = 0,\ x > 0\}$$

Esercizio 5.22. *Comprensione della geometria.* Per $n = 0, 1, \dots$ siano

$$A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ nx \leq y \leq (n+1)x\right\}, \qquad A = \bigcup_n \operatorname{int}(A_n)$$

(a) $\bigcup_n A_n$ è chiuso?

(b) Determinare la chiusura di A.

(c) Determinare l'insieme dei punti interni di A.

(d) Determinare la parte interna della chiusura di A.

(e) Determinare ∂A.

Esercizio 5.23.* $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^3 - y^2 = m,\ m \in 2\mathbb{N}\right\}$ è aperto? Si determini poi ∂X.

Esercizio 5.24. $M = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 < \ln(1 + w^2)\right\}$ è chiuso?

Esercizio 5.25. Sia $r > 0$ e sia

$$A_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \min_{n \in \mathbb{Z}} d\big((x,y),(n,0)\big) < r\right\}$$

dove $d(\bullet)$ indica la distanza Euclidea in $\mathbb{R}^2$.

(a) Argomentando, stabilire se A_r è aperto.

(b) Determinare il più piccolo insieme chiuso contenente A_r.

(c) Determinare ∂A_r.

Esercizio 5.26. Sia $s \in (0, +\infty)$; si ponga $Q_s = [-s, s]^2$ e sia $F_s = \partial Q_s \subset \mathbb{R}^2$. Stabilire se è chiuso l'insieme

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} F_{2^k}$$

Esercizio 5.27. *Orecchino Hawaiano.* In $\mathbb{R}^2$, per $n \in \mathbb{Z}$, siano

$$C_n = \left\{p \in \mathbb{R}^2 : \left\|p - \left(0, 2^n\right)\right\| = 2^n\right\}, \qquad H = \bigcup_{n<0} C_n$$

H è compatto? Motivare esaustivamente.

Esercizio 5.28. L'insieme $T = \left\{\operatorname{tr}(A) : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ è ortogonale}\right\} \subset \mathbb{R}$ è compatto?

Esercizio 5.29. Nello spazio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ delle matrici di dimensione $n \times n$ reali sia

$$X = \left\{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : B \text{ è diagonalizzabile},\ |\lambda_k| \leq 2\right\}$$

dove λ_k sono tutti gli autovalori di B.
Stabilire con argomentazione esaustiva se X è aperto, chiuso, limitato.

Esercizio 5.30. Determinare gli insiemi di livello per le seguenti superfici. Rappresentare.

(a) $f(x,y) = x + y$

(b) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = 2 - x^2$

(d) $f(x,y) = |x| + |y|$

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4$

(f) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(g) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x+y}\right)$

(h) $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(i) $f(x,y) = x^3 - y^3$

(j) $f(x,y) = \min\{x+2, y\}$

(k) $f(x,y) = \max\{x, y+1\}$

(l) $f(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$

(m) $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$

(n) $f(x,y) = \ln(x^2 - 1)\ln(y^2 - 4)$

(o) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(p) $f(x,y,z) = |x| + |y| + |x|$

(q) $f(x,y,z) = xyz$

(r) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 6z^2$

Esercizio 5.31. ☕☕ Determinare il dominio di ognuna delle funzioni seguenti, e dire se esso è aperto, chiuso, limitato.

(a) $f(x,y) = \ln(10 - x^2 - 2y^2)$

(b) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-2x)(4x-x^2-y^2)}$

(c) $f(x,y) = (121 - 2x^2 - 11y^2)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $f(x,y) = \ln\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{10}y}$

(f) $f(x,y) = e^{\frac{1}{x}} \ln(1-y)$

(g) $f(x,y) = \ln(|xy|) + \frac{1}{x^2+y^2-1}$

(h) $f(x,y) = \ln(x^2 y)\sqrt{|x| - \frac{1}{2}}$

(i) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} + \frac{1}{\ln(y^2)}$

(j) $f(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz}\right)$

(k) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - 4z^2}\,\ln(xyz)$

(l) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{xyz}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Esercizio 5.32. ☕☕☕ Si consideri la funzione reale $f : D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = x^y\sqrt{\ln(y)}$, dove $D \subset \mathbb{R}^2$. Il dominio di questa funzione è l'insieme $D : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 1\right\}$.
Si osservi ora che il punto $p = (-2,2)$ è un punto in cui f è definita, e si ha $f(p) = 4\sqrt{\ln(2)}$, ma $p \notin D$. In particolare esiste un insieme $A = \left\{q \in \mathbb{R}^2 \setminus D : f(q) \in \mathbb{R}\right\}$ costituito di (infiniti) tali punti.
Come si spiega il fatto che questo insieme infinito di punti non fa parte del dominio della funzione, nonostante essa sia ivi definita?
Si determini in seguito questo insieme di punti.
(La prima parte dell'esercizio risulterà banale per chi ha affrontato l'esercizio 3.15 durante la prima parte del corso).

6. Funzioni in $\mathbb{R}^n$.

Premesse. Una generica funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è denotata come $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se non vi è ambiguità spesso si abbrevia a f, mantenendo esplicita la sua struttura.

- Il termine ***derivata parziale*** di f indica la derivata (di f) rispetto ad una delle direzioni individuate dai vettori canonici dello spazio $\mathbb{R}^n$.
  La derivata parziale viene denotata (equivalentemente) $\partial_{x_1} f$ – f'_{x_1} – $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ – f'_1 – $\partial_1 f$ et cetera.
- Il termine ***derivata seconda*** di f indica la derivata della derivata (di f) rispetto alla stessa variabile/stesso vettore canonico.
  La derivata seconda viene denotata (equivalentemente) $\partial^2_{xx} f$ – f''_{xx} – $f''_{1,1}$ – $\partial^2_{x_1 x_1} f$ – $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et cetera.
- I termine ***derivata seconda mista*** (talvolta "incrociata") di f indica la doppia derivata (di f) rispetto a due variabili/direzioni differenti, specificate.
  La derivata seconda mista viene denotata (equivalentemente) $\partial^2_{xy} f$ – f''_{x_1,x_2} – $f''_{2,3}$ – $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et cetera.

6.A - Continuità.

Esercizio 6.1. ☕ Studiare la continuità nell'origine delle seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $n = \{2; 3\}$).

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^3+y^3)\sqrt{x}}{x^5+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

Esercizio 6.2. ☕☕ Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dall'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x+y)^2-1}, & x+y \neq \pm 1 \\ A, & x+y = \pm 1 \end{cases}, \qquad A \in \mathbb{R}$$

(a) La funzione f è continua nel punto $(1,0)$ per qualche valore di A? Argomentare.
(b) La funzione f è continua nel punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ per qualche valore di A? Argomentare.
(c) La funzione f è continua nel punto $(2,1)$ per qualche valore di A? Argomentare.

Esercizio 6.3. ☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^{2n}+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove n è un parametro.

(a) Per quali valori di $n \in \mathbb{Q}$ la funzione risulta continua nell'origine?
(b) Mostrare che per $n = 2$ il limite per $(x,y) \to (0,0)$ non è unico.

Esercizio 6.4.* ☕ Stabilire per le seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se è possibile scegliere $K \in \mathbb{R}$ per il quale ognuna di esse risulta continua nel punto di taglio indicato. (I valori di K possono chiaramente essere differenti da funzione a funzione).

(a) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\ln(x^2+2y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ K, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2+y^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ K, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2+y^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ K, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x-1)^2+(y-1)^2}, & (x,y) \neq (1,1) \\ K, & (x,y) = (1,1) \end{cases}$

Esercizio 6.5. ☕☕ *Destrezza.* Studiare la continuità delle seguenti funzioni, ognuna ben definita su tutto $\mathbb{R}^2$. I parametri presenti sono da considerarsi reali.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a+y^a}{xy}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \left|\dfrac{y}{x^a}\right| e^{-\left|\frac{y}{x^a}\right|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2-1}{1-x}, & x \neq 1 \\ K, & x = 1 \end{cases}$

Esercizio 6.6.* ☕☕☕ Studiare la continuità della seguente funzione in tutti i punti del dominio.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} 1, & |y| \geq x^2 \\ 1, & y = 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 6.7.* ☕☕ Mostrare che per $\alpha = \frac{\ln(\pi)}{e}$ la seguente funzione è continua nell'origine.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 6.8. ☕☕☕ Sia $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - 2^{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Stabilire, argomentando per maggiorazioni, la continuità di ω nell'origine.

Esercizio 6.9.* ☕☕ La seguente funzione è continua nell'origine? Argomentare bene.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^ay^b + x^cy^d}{x^by^a + x^dy^c}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad (a,b,c,d) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

6.B - Derivate Parziali.

Esercizio 6.10. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ammette derivate parziali in un punto (scelto a piacere), ma che non è continua in quel punto o argomentarne la non esistenza.

Esercizio 6.11. ☕ Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in un punto (scelto a piacere), ma che non ammette derivate parziali in quel punto o argomentarne la non esistenza.

Esercizio 6.12. ☕☕ Argomentare l'esistenza (o la non esistenza) delle derivate parziali nel punto $(0,0)$ per la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} |x|, & y = x^2 \\ 0, & y \neq x^2 \end{cases}$$

Esercizio 6.13.* ☕☕ Sia $x^* = (2,0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x_1 - 2)\|x - x^*\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ con $x = (x_1, x_2)$, dove $\|x - x^*\|$ indica la norma Euclidea del vettore $x - x^*$.

(a) Quali derivate parziali di f esistono in x^* e perché?

(b) Quali derivate parziali di f sono continue in x^* e perché?

Esercizio 6.14.* ☕☕ Sia $x^* = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x_1\|x - x^*\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ con $x = (x_1, x_2)$, dove $\|x - x^*\|$ indica la norma Euclidea del vettore $x - x^*$.

(a) Quali derivate parziali di f esistono in x^* e perché?

(b) Quali derivate parziali di f sono continue in x^* e perché?

Esercizio 6.15.* ☕☕ Siano $L \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ L, & x = 1 \end{cases}$$

(a) Quali derivate parziali tra $f_1'(1,0)$ e $f_2'(1,0)$ esistono per tutti i valori di L e perché?

(b) Trovare i valori di L per i quali f è continua in $x = 1$ oppure dimostrarne l'inesistenza.

Esercizio 6.16.* ☕☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2 + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove a è un numero reale.

(a) È possibile scegliere $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che f sia continua in $\mathbb{R}^2$? Argomentare esaustivamente.

(b) Quali derivate parziali di f esistono nel punto $(0,0)$? Argomentare utilizzando la definizione di derivata.

Esercizio 6.17.* ☕☕ È possibile trovare una costante K reale per la quale la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ K, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ha derivata $f_x'(x,y)$ continua nel punto $(0,0)$? Argomentare bene.

Esercizio 6.18. ☕☕☕ Studiare l'esistenza delle derivate parziali nei rispettivi punti notevoli per tutte le funzioni degli esercizi 6.1 e 6.5.

6.C - Differenziabilità e riepilogo.

Esercizio 6.19. ☕ Siano $k \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ k, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Si mostri che $|f(x,y)| \le \max\left\{\frac{1}{2}, k\right\}$.

(b) f è differenziabile nell'origine? Perché?

Esercizio 6.20.* ☕☕☕ Dimostrare che la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3}\, y^3}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

non è differenziabile in $(0,0)$.
(Nota: lo studioso che ha compreso bene la definizione di funzione differenziabile risolverà questo esercizio in pochi secondi, fornendo una argomentazione breve ed esaustiva. Altrimenti, il tempo impiegato sarà parecchio...)

Esercizio 6.21.* ☕☕☕ Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ le funzioni definite dalle espressioni

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2, \qquad g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{se} \quad x + 2y \ge 3 \\ 2x + 4y - 3, & \text{se} \quad x + 2y < 3 \end{cases}$$

(a) Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$.

(b) Quali derivate parziali di g esistono nel punto $(1,1)$? Argomentare utilizzando la definizione di derivata.

(c) La funzione g è differenziabile nel punto $(1,1)$? Argomentare la risposta studiando l'errore di approssimazione che compare nella definizione di differenziabilità.

Esercizio 6.22.* ☕ Sia f una funzione reale differenziabile ovunque. Dire se la funzione $g(x,y) = x + f(-y)$ è differenziabile nel punto $(1,1)$ oppure no, argomentando per bene.

Esercizio 6.23.* ☕☕ Si consideri la funzione $f(x,y) = |x| \ln(1+y)$ definita nel suo dominio naturale.

(a) Determinare e rappresentare graficamente il dominio di f. È un insieme chiuso?

(b) Determinare l'insieme dei punti in cui esistono tutte le derivate parziali di f.

(c) Determinare l'insieme dei punti per i quali esistono tutte le derivate parziali di f ma nei quali f non è differenziabile.

Esercizio 6.24.* ☕☕☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{2x}, & x \le y \\ e^{2y}, & x > y \end{cases}$$

(a) Dimostrare che la funzione $d_\infty(x,y) := \max\limits_{k=1,\dots,n} \left\{|x_k - y_k|\right\}$ è una distanza su $\mathbb{R}^n$.

(b) Utilizzando la definizione e opportune maggiorazioni, studiare la continuità di f nel punto $(1,1)$.

(c) Esistono le derivate parziali di f nel punto $(1,1)$? Argomentare esaustivamente.

Esercizio 6.25. Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le 0\}$ e si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in C \\ x^2 - y^2, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C \end{cases}$$

(a) Determinare i punti di continuità di f.

(b) Determinare per quali valori $x^* \in \mathbb{R}$ la funzione è differenziabile nei punti $(x^*, 0)$.

Esercizio 6.26.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante l'espressione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad xy \ge 1 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Studiare la continuità di f nel punto $(1, 2)$. Argomentare esaustivamente.

(b) Studiare la continuità di f nel punto $(1, 1)$. Argomentare esaustivamente.

(c) Studiare la continuità di f nel punto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Argomentare esaustivamente.

(d) Stabilire se esiste $f'_x(1, 1)$. Argomentare esaustivamente.

(e) Stabilire se f è convessa nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ xy \ge 1\}$.

Esercizio 6.27.* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita mediante l'espressione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2 y^2 + 1}, & \text{se} \quad x^2 + y^2 \ge 2 \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Studiare la continuità di f nel punto $(3, 2)$. Argomentare esaustivamente.

(b) Studiare la continuità di f nel punto $(1, 1)$. Argomentare esaustivamente.

(c) Studiare la continuità di f nel punto $\left(0, \sqrt{2}\right)$. Argomentare esaustivamente.

(d) Stabilire se esiste $f'_y(1, 1)$. Argomentare esaustivamente.

(e) Stabilire se f è convessa nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Esercizio 6.28.* Si consideri la funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2 + 2y^2)\sqrt{x^\alpha}}{|x| + |y|}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

al variare di un opportuno parametro $\alpha \in \mathbb{Q}$.

(a) Porre delle condizioni sul parametro α affinché g risulti ben definita per come è definita.

(b) Determinare per quali valori di α la funzione è continua nell'origine.

(c) Studiare l'esistenza di $g'_x(0, 0)$ e $g'_y(0, 0)$ al variare di α.

(d) Mostrare in modo non rigoroso che g è differenziabile nell'origine per $\alpha \in 2\mathbb{Q}^+,\ \alpha > 4$.

(e) Mostrare in modo rigoroso che g è differenziabile nell'origine per $\alpha \in 2\mathbb{Q}^+,\ \alpha > 4$.

Esercizio 6.29.* ☕☕☕ Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita mediante l'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} x(y-2)g(x,y), & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

(a) È vero o falso che $f'_x(2,2)$ esiste per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(b) È vero o falso che $f'_y(1,2)$ esiste per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(c) È vero o falso che f è continua in $(2,2)$ per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(d) È vero o falso che f è differenziabile in $(2,2)$ per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

Esercizio 6.30.* ☕☕☕ Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita mediante l'espressione

$$f(x,y) = \begin{cases} xyg(x,y), & y \neq 1 \\ 0, & y = 1 \end{cases}$$

(a) È vero o falso che $f'_x(0,2)$ esiste per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(b) È vero o falso che $f'_y(0,1)$ esiste per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(c) È vero o falso che f è continua in $(0,1)$ per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

(d) È vero o falso che f è differenziabile in $(0,1)$ per qualsiasi scelta di g? Argomentare esaustivamente.

6.D - Funzioni Composte.

Esercizio 6.31.* ☕ Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $g(t)=f\left(e^{t^2},\ e^{2t+1}\right)$ definita per ogni t reale. Calcolare il valore di $g'(0)$ ipotizzando che valgano le seguenti condizioni:

$$f_1'(0,1)=-3 \qquad f_1'(1,e)=2 \qquad f_2'(0,1)=-1 \qquad f_2'(1,e)=4$$

Esercizio 6.32.* ☕ Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile e sia $g(t)=f\left(\sqrt{1+t},\ 2\ln(t^2+1)\right)$ definita per ogni t reale. Calcolare il valore di $g'(0)$ ipotizzando che valgano le seguenti condizioni:

$$f_1'(1,0)=3 \qquad f_1'(0,0)=2 \qquad f_2'(1,0)=1 \qquad f_2'(0,0)=4$$

Esercizio 6.33.* ☕☕ Si consideri la seguente affermazione: "*se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, e la funzione composta $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $g(x,y)=f\big(x^3,y\big)$ per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ è differenziabile ovunque nel suo dominio, allora anche f è differenziabile ovunque nel suo dominio.*"

Si confuti tale affermazione proponendo un controesempio, argomentando, ossia si proponga una funzione f concreta che soddisfi le ipotesi ma non la tesi.

Esercizio 6.34. ☕ Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da $f(x,y)=g\big(x^2+e^{xy},\ \phi(xy)\big)$. Determinare $\nabla f(1,0)$ sapendo che $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\phi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\phi(1,0)=1$, $\nabla\phi(1,0)=(\sqrt{2},e)$, $\phi(1,1)=(\pi,\pi)$, $\nabla g(2,1)=(\pi,3)$, $\nabla g(1,0)=\big(\phi(1,0),e\big)$.

Esercizio 6.35.* ☕ Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ due funzioni differenziabili, e sia $h(t)=f\big(t^2,g(t-1)\big)$ per ogni t reale. Si sappia inoltre che

$$f\big(1,g(0)\big)=2 \qquad f_1'\big(1,g(0)\big)=1 \qquad f_2'\big(1,g(0)\big)=-2 \qquad g'(0)=-3$$

Utilizzando la migliore approssimazione lineare di h intorno a $t=1$, calcolare un valore approssimato di $h\left(\frac{8}{9}\right)$.

7. Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$.

7.A - Concavità/Convessità.

Esercizio 7.1. ☕☕ *Insiemi convessi.* Familiarizzare con il concetto determinando se i seguenti insiemi sono convessi oppure no. Non è sempre necessario utilizzare la definizione, a volte è sufficiente un controesempio numerico.

(a) $A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2^2 \geq 8x_1\right\}$

(b) $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{7} + \dfrac{z^2}{16} \leq 1\right\} \setminus \{(0,0,1)\}$

(c) $C = \left\{x \in [0,+\infty)^2 : x_1 x_2^2 \leq 1\right\}$

Esercizio 7.2. La funzione $f(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$ è concava nel suo dominio naturale? Argomentare senza eseguire alcun calcolo.

Esercizio 7.3.* ☕ Stabilire se la seguente funzione è concava su $\mathbb{R}^2$ oppure no.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 \ln\left(\pi + \frac{e^{x^{2019}} + y^{e^{2019}}}{2019^{e^{xy}}}\right)}$$

Esercizio 7.4. ☕☕☕ Si consideri l'affermazione: "*se una funzione f è convessa, allora ogni curva di livello di f è convessa.*"

(a) Si dimostri tale affermazione nel caso la si reputi vera. Si esibisca un controesempio altrimenti.

(b) Stando a quanto appurato nel punto precedente, dire se l'ipotesi, nell'affermazione iniziale, è una condizione sufficiente oppure necessaria oppure sufficiente e necessaria oppure né sufficiente né necessaria.

Esercizio 7.5. ☕☕ Siano A, B due beni di quantità rispettive p e q non negative. Sia $U(p,q) = \min\{p, 2q\}$ la funzione di utilità di un consumatore. Si mostri che U è concava.

Esercizio 7.6.* ☕ *Un primo utilizzo della Hessiana.* Mostrare che la funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = -e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

non è convessa su $\mathbb{R}^2$, ma è tuttavia convessa su ogni sottoinsieme convesso del cerchio unitario centrato in $(0,0)$.

Esercizio 7.7. ☕☕☕☕ Sia $g(x) = \boldsymbol{x}^t Q \boldsymbol{x}$, dove $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, simmetrica e semidefinita positiva. Dimostrare che $g(x)$ è convessa su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 7.8.* ☕ Giustificando esaustivamente, trovare tutti i valori del parametro reale α per i quali risulta convessa in $\mathbb{R}^2$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + x^4 + \alpha xy + y^2$.

Esercizio 7.9.* ☕☕ Trovare, giustificando pienamente e senza utilizzare la matrice Hessiana, tutti i valori del parametro reale λ per i quali è concava in $\mathbb{R}^2$ la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = -(x-y)^4 + \lambda x^{\frac{2}{3}}$.
Ripetere utilizzando la matrice Hessiana, osservando che, per quanto risolutivo, lo studio si complica.

Esercizio 7.10.* ☕☕ Mostrare che la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \lambda x^3 + \frac{3}{2}x(1-y) + 2\lambda y^2 + \lambda e^x$ risulta convessa in $\mathbb{R}^2$ per $\lambda \geq \frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Esercizio 7.11.* ☕☕ Per quali valori reali di λ la funzione $f(x,y) = x^2 - 10xy + (30+\lambda)y^2 + \lambda e^{|2x-y|}$, definita sul suo dominio naturale, è convessa su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 7.12.* Trovare tutti i valori del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione $g(x,y) = -9x^2 + 6xy - y^2 + \mu\sqrt[3]{|x+y|}$ è concava in $\mathbb{R}^2$, dove $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Argomentare esaurientemente.

Esercizio 7.13. ☕☕☕ Trovare tutti i valori di $\theta \in \mathbb{R}$ per i quali è convessa nel suo dominio naturale la funzione $h(x,y) = \theta \ln\left(2700 - (1-\theta^2)e^{|x+y|}\right)$.

Esercizio 7.14.* ☕☕☕ Trovare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali è strettamente concava la funzione

$$g : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \left(\frac{1}{3}x^{-a} + \frac{2}{3}y^{-a}\right)^{-\frac{1}{a}}$$

Esercizio 7.15. ☕ Mostrare che $f : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \ln\left(x^{\alpha} + y\right)$, con $\alpha \in (0,1)$, è concava nel suo dominio. Argomentare utilizzando le proprietà delle composizioni di convessità viste nel modulo 1.

Esercizio 7.16. ☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Sia noto che

$$f\left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right) = 3 \qquad f_1'\left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right) = 1 \qquad f_2'\left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right) = -2$$

(a) Utilizzando la migliore approssimazione lineare locale di f intorno al punto $\left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right)$, calcolare un valore approssimato di $f(1,0)$.

(b) Ipotizzando successivamente che f sia strettamente concava, si dica se il valore esatto di $f(1,0)$ è maggiore o minore del valore trovato nel punto precedente. Argomentare pienamente.

Esercizio 7.17. ☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $\left(\frac{101}{100}, \frac{101}{100}\right)$ ma non differenziabile in tale punto. Quale valore, o quali valori, tra $f\left(\frac{101}{100}, 1\right)$ e $f\left(\frac{101}{100}, \frac{101}{100}\right)$ può essere approssimato bene (o possono essere approssimati bene) utilizzando delle approssimazioni lineari del tipo

$$f(x,y) \approx f\left(\frac{101}{100}, 1\right) + a\left(x - \frac{101}{100}\right) + b\left(y - \frac{101}{100}\right)$$

e perché? Per quale/i valore/i di a, b? In che senso è buona l'approssimazione proposta?

7.B - Ottimizzazione Libera.

Prerequisiti: conoscere e riconoscere le equazioni cartesiane delle coniche e delle quadriche principali. Dimestichezza nelle manipolazioni algebriche, prodotti notevoli (quadrati e cubi di binomio e trinomio, somme e differenze di cubi, raccoglimenti parziali e totali, fattorizzazioni, Ruffini et cetera).

Esercizio 7.18. ☕ *Pratica.* Trovare tutti i punti stazionarî della funzione $f(x,y) = x^3y^3 - 3xy^3 - 3x^3y + 9xy$ sul suo dominio naturale. (Suggerimento: i punti totali sono tredici).

Esercizio 7.19.* Sia $\phi(x,y) = 4\alpha x^2 + \alpha^2 xy + \alpha y^2$ una funzione ben definita. Trovare, argomentando, tutti i valori del parametro reale α per i quali la funzione ammette minimo assoluto sul suo dominio.

Esercizio 7.20.* ☕☕ Si trovino tutti i valori di $b \in \mathbb{R}$ per i quali il punto $(b, 2b) \in \mathbb{R}^2$ è l'unico punto di minimo locale della funzione $f(x,y) = x^4 + 4y^4 - bx^2y^2 + 126b^2x^2$.

Esercizio 7.21. ☕ *Allenamento.* Ottimizzare le seguenti funzioni nel loro dominio naturale.

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}, \qquad a, b \neq 0$

(c) $f(x,y) = \sqrt{1+(x-1)y} - x^2$

(d) $f(x,y) = 3x^4y^2 - x^3y^2 - x^2y^2 + 8xy$

Esercizio 7.22. ☕☕ Senza calcolare il gradiente, determinare i punti di massimo e di minimo per la seguente funzione, argomentandone l'esistenza e specificando se si tratta di estremanti relativi o assoluti.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \ln\left(\frac{x^2+y^2+a}{x^2+y^2+b}\right), \quad (a,b) > 0, a \neq b$$

Esercizio 7.23. ☕ Determinare e classificare tutti gli estremanti delle seguenti funzioni tenendo presente che lo studio della Hessiana potrebbe in alcuni casi risultare inconcludente.

(a) $f(x,y) = x^3y + x^3 - x^2y$

(b) $f(x,y) = (x-y)^3$

(c) $f(x,y) = x^4 + (y-1)^2$

(d) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$

Esercizio 7.24. ☕☕ Determinare e classificare tutti gli estremanti della funzione

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j} x_i x_j^2$$

Esercizio 7.25. ☕☕☕ Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \qquad f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x}\|^2$$

(a) Determinare l'espressione esplicita di $f(\boldsymbol{x})$.

(b) Determinare tutti i punti stazionarî di f, classificandoli.

(c) Costruire la matrice Hessiana di f.

(d) Supponendo ora che la matrice Hessiana sia la matrice associata ad una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, si determini la dimensione di $\ker(h)$ e una sua base.

7.C - Ottimizzazione Vincolata.

Premessa: i problemi di ottimizzazione vincolata qui presenti richiamano la teoria affrontata, senza un particolare ordine.

L'analisi del testo e la decisione sul metodo risolutivo è parte integrante dell'apprendimento e dello studio. Si noterà presto che, talvolta, tempo e moli di tediosi calcoli possono essere risparmiati in favore di una analisi ben più metodica e furba.

Esercizio 7.26. ☕☕ *Allenamento.* Si familiarizzi con l'ottimizzazione vincolata risolvendo i seguenti problemi in due modi: con i moltiplicatori di Lagrange e senza. Giustificare sempre l'esistenza (o l'inesistenza) di massimi e minimi assoluti.

(a) Trovare massimo e minimo assoluti di $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, con $f(x, y) = |x| + |y|$, sulla curva $x^2 + y^2 = 1$.

(b) Trovare il più piccolo cerchio centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$ che ha intersezione non vuota con la curva $xy = k$ per $k \neq 0$.

(c) Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$ sulla retta $x + y = 8$.

(d) Sia $f : K_n \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = -x\ln(x) - y\ln(y)$. Stabilire se l'insieme $f(K_n)$ è compatto, dove $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 0\right\}$.

Esercizio 7.27. ☕☕ Sia $f : Q_5(0) \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 5x^2y^2, \qquad Q_5(0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 5,\ |y| \le 5\right\}$$

(a) L'insieme $Q_5(0)$ è compatto? È convesso?

(b) Determinare l'insieme $f\big(Q_5(0)\big)$ e stabilire se è compatto o no.

(c) Studiare la natura del punto $(0, 0)$ per f.

Esercizio 7.28. ☕ Trovare i punti di massimo e minimo assoluti, argomentandone l'esistenza, per la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ soggetta a $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Esercizio 7.29.* ☕☕ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = -(xy + yz)^2 + x - z$. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti di f sull'insieme $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + zy + x - z = 0\right\}$.

Esercizio 7.30.* ☕☕☕ Per la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$ si trovino massimo e minimo assoluti, giustificandone l'esistenza, sull'insieme

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \ge x_1^2 + x_2^2,\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6\right\}$$

Esercizio 7.31.* ☕☕ Per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e con $xy \neq 0$ sia

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2\ln|x| - \ln|y|$$

Sia inoltre l'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ xy \neq 0\right\}$$

(a) Trovare e classificare i punti stazionarî di f.

(b) Trovare, se esistono, il minimo assoluto di f in A e il massimo assoluto di f in A, argomentando esaustivamente!

(c) Stabilire se f ammette minimo assoluto nell'interno del primo quadrante. Argomentare.

Esercizio 7.32. ☕☕ Sia $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + 2y^2}\right\}$ e $\Phi : A \to \mathbb{R}$ così definita:

$$\Phi(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 + z^2 + 1)$$

Determinare $\Phi(A)$.

Esercizio 7.33.* Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione reale definita da $f(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz}\right)$.

(a) Stabilire con argomentazione esaustiva se Ω è un insieme chiuso.

(b) Studiare la continuità della funzione $F(x,y,z)$ dove

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega \\ 0, & (x,y,z) \notin \Omega \end{cases}$$

(c) Stabilire se f ammette massimoi e/o minimoi assolutoi sull'insieme

$$A = \Omega \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

ed eventualmente determinarli.

Esercizio 7.34.* Determinare, argomentandone l'esistenza, i punto di massimo e minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to R$ sull'insieme V, dove f, V sono così definiti:

$$f(x,y,z) = 2xy + 3yz, \qquad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}$$

Esercizio 7.35.* Sia $f(x,y,z) = e^{3x}(1 + 25x^2 + 25y^2)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 9y^2 < 1\right\}$.

(a) Trovare un sottoinsieme infinito di D in cui f sia convessa. Argomentare esaustivamente.

(b) Trovare e classificare i punti stazionarî di f in R^2.

(c) Trovare massimo e minimo assoluti di f in $D \cup \partial D$ giustificandone l'esistenza.

(d) Esiste il massimo assoluto di f in D? Perché? Esiste il minimo assoluto di f in D? Perché?

Esercizio 7.36.* Siano $f(x,y) = 2x + y$ e $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + p\sqrt{y} \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$, dove $p > 0$ è un parametro. Per quali valori di p il massimo assoluto di f esiste in B e si raggiunge in punti appartenenti all'asse delle ascisse?

Esercizio 7.37.* Sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e siano f, P così definiti:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad P = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \prod_{k=1}^{n} x_k = N,\ x_k > 0\ \forall k,\ N \in \mathbb{N}\right\}$$

dove il simbolo $\prod$ è l'analogo di $\sum$ per il prodotto.
Si risolva il problema $\min_P\{f\}$, e successivamente si deduca la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Esercizio 7.38. Sia $f : \Lambda \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = (1+z)^2(x + 4y)$, dove l'insieme Λ è così definito:

$$\Lambda = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (1+z)^2 + y^2 = x^2,\ x \in [0,1]\right\}$$

Può essere utile sapere che Λ rappresenta una porzione di cono.

(a) Determinare l'insieme dei punti interni di Λ.

(b) Scrivere Λ come unione di tre insiemi, ossia $\Lambda = V_0 \cup H_1 \cup H_x$, dove V_0 rappresenta l'insieme che contiene solo il vertice del cono, H_1 rappresenta l'insieme che definisce la base del cono e H_x rappresenta l'insieme che definisce il guscio laterale.

(c) Determinare tutti i punti stazionarî di f in Λ.

(d) Determinare l'insieme $f(\Lambda)$ stabilendo se è compatto.

Esercizio 7.39. ☕☕☕☕ Dal corso *Fondamenti di Matematica* (che a partire dall'A.A. 2025/2026 è svolto durante il secondo semestre) è (o sarà) noto il *Teorema Spettrale:*

Teorema. *Sia A un operatore autoaggiunto su uno spazio reale $\mathcal{V}$ di dimensione finita e dotato di una operazione di prodotto interno. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A, e sia W_i l'autospazio associato al rispettivo autovalore λ_i per ogni $i = 1, \dots, k$. Sia E_ℓ la proiezione ortogonale di $\mathcal{V}$ su W_ℓ al variare di ℓ. Allora W_ℓ è ortogonale a W_i quando $i \neq \ell$, e $\mathcal{V}$ è somma diretta dei W_k, ossia $\mathcal{V} = W_1 + \dots + W_k$, e inoltre si ha*

$$A = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_k E_k$$

Nota: Si presti attenzione alla terminologia: i λ_k sono gli autovalori *distinti*, non è detto che siano tutti gli autovalori (si vada a ripassare la definizione di *molteplicità algebrica* di un autovalore).

Questo Teorema, applicato alle matrici reali simmetriche, afferma in particolare che *data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice simmetrica reale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.*

Si dimostri questo Teorema, nella sua formulazione per matrici simmetriche reali, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange seguendo questi passi:

1. Considerare la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle \equiv \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$$
Si vuole ottimizzare f sulla sfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$, ossia con il vincolo $\|\boldsymbol{x}\|^2 - 1 = 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. Mostrare che la restrizione di f su $\mathbb{S}^{n-1}$ ammette massimo e minimo assoluti.
3. Considerare $\lambda_1, \boldsymbol{v}_1$, tali che $\lambda_1 = f(\boldsymbol{v}_1)$, dove $\lambda_1 = \max f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e $\boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$ e mostrare che $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda \boldsymbol{v}_1$.
4. Ottimizzare ora f su $\mathbb{S}^{n-2}$, ricalcando quando fatto in precedenza, e ripetere su $\mathbb{S}^{n-3}$.
5. Mostrare che iterando il processo si ottengono n vettori $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ ortogonali tra loro e anche ortonormali, ossia quindi è stata ottenuta una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e si ha $A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k$, dove $\lambda_k = \max f|_{\mathbb{S}^{n-k}} = f(\boldsymbol{v}_k)$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$
6. Dedurre infine che il massimo di f sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ è il più grande autovalore di A, mentre il minimo di f è il più piccolo autovalore di A e i rispettivi punti di massimo e di minimo sono i corrispondenti autovettori normalizzati.

Esercizio 7.40. ☕☕☕☕☕ Sia $f = \langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i,k} A_{ik} x_i x_k$, dove A è una matrice simmetrica di ordine n, e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
Si vuole ottimizzare f sull'ellissoide E^{n-1} descritto da

$$E^{n-1} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}, \qquad a_1, \dots, a_n > 0$$

Sia B la matrice diagonale i cui elementi sono gli a_n.

(a) Dimostrare che se la coppia $\lambda, \boldsymbol{x}$ risolve il sistema di Lagrange, allora $B^2 A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, e inoltre $\lambda = f(\boldsymbol{x})$.

(b) Dimostrare che la matrice $B^2 A$ (in generale non simmetrica) ha gli stessi autovalori della matrice BAB (sempre simmetrica), e che $\boldsymbol{\omega}$ è autovettore di BAB con autovalore λ se e solo se $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{\omega}$ è autovettore di $B^2 A$ con autovalore λ.

(c) Mostrare che le matrici $B^2 A$ e BAB hanno lo stesso polinomio caratteristico. Cosa si può concludere dalla precedente tesi?

(d) Mostrare che ottimizzare f sull'ellissoide E^{n-1} è equivalente a ottimizzare $\tilde{f} = \langle \boldsymbol{\omega}, BAB\boldsymbol{\omega} \rangle$ sulla sfera unitaria S^{n-1}.

(e) Aiutandosi con quanto determinato nei punti precedenti, determinare massimo e minimo di f.

Esercizio 7.41. ☕☕ Risolvere il seguente problema

$$\max\{\ln(x)+\ln(y)\}, \qquad \text{soggetta a} \quad \begin{cases} xy \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

Esercizio 7.42.* ☕☕☕ Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = 2xy + yz$. Trovare massimo e minimo assoluto di f, argomentandone l'esistenza, sull'insieme $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.
f è convessa su W? Argomentare esaustivamente.

Esercizio 7.43.* ☕☕ Risolvere il problema

$$\min_V \{x^2 - y\}, \qquad V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq -2,\ y^2 \leq x,\ y \geq 0\}$$

Il punto di minimo trovato è locale o globale?

Esercizio 7.44.* ☕☕ Siano $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e l'insieme E così definiti:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2, \qquad E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$$

Stabilire se $f(E)$ è compatto. Determinare $\partial f(E)$.

Esercizio 7.45. ☕☕☕ Si consideri il seguente problema:

$$\max\{2x+3y\}, \qquad \text{soggetta a} \quad \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determinare le coppie (x^*, y^*) che soddisfano le condizioni di Kuhn-Tucker.
(b) Risolvere il problema di massimizzazione dato.
(c) Si osservi che i valori trovati nei due punti precedenti sono differenti. Perché?

Esercizio 7.46. ☕☕ Si dimostri che la funzione $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2$ ammette massimo e minimo assoluti sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$.
Si trovino i punti di A in cui si raggiungono tali massimo e minimo assoluto.

Esercizio 7.47.* ☕☕☕☕ Denotiamo con $\mathcal{M}^{<}_{m,n}(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici di dimensione $m \times n$ a coefficienti reali, con $m < n$. Sia A una matrice in questo spazio, e sia dato per noto che il rango che A è massimo.
Sia $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \setminus \{(0,0,\dots,0)\}$.
Si vuole ottimizzare la funzione

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2, \qquad \text{soggetta a} \quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Scrivere le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker per il problema e mostrare che la soluzione è unica ed è data da $\boldsymbol{x}^* = A^t\left(AA^t\right)^{-1}\boldsymbol{b}$.
(b) Il punto $\boldsymbol{x}^*$ trovato precedentemente è punto di minimo o di massimo per $f(\boldsymbol{x})$? Argomentare.

Esercizio 7.48. ☕☕ *Condizioni di Fritz-John.* Minimizzare la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x+1)^2+y^2$ soggetta a $-x^3+y^2 \leq 0$.

Esercizio 7.49.* ☕☕ Sia $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con le seguenti proprietà:

1. Per ogni $\bar{q}_1 \in \mathbb{R}$ fissato, $u(\bar{q}_1, q_2)$ è una funzione strettamente crescente di q_2.
2. Per ogni $\bar{q}_2 \in \mathbb{R}$ fissato, $u(q_1, \bar{q}_2)$ è una funzione strettamente crescente di q_1.

Si proponga un ragionamento ben articolato e rigoroso per dimostrare che u ammette un unico minimizzante assoluto sull'insieme $Q = \{(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 : q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_1+3q_2 \leq 3\}$.

Esercizio 7.50.* ☕☕☕ Un'azienda produce due diversi tipi, A e B, di un bene. Il costo giornaliero di produzione di Q_A unità di A e Q_B unità di B è $C(Q_A, Q_B) = 0.1(Q_A^2 + Q_AQ_B + Q_B^2) + 200$. Supporre che l'azienda venda tutto quanto produce al prezzo unitario $P_A = 120$ per A e $P_B = 90$ per B.

(a) Dimostrare l'esistenza di livelli giornalieri di produzione (Q_A^*, Q_B^*) che massimizzano il profitto dell'azienda sull'insieme $\{(Q_A, Q_B) \in \mathbb{R}^2 : Q_A \geq 0,\ Q_B \geq 0\}$. Trovare (Q_A^*, Q_B^*)

(b) Se P_B restasse fisso a 90, quale nuovo prezzo unitario di A (P_A) implicherebbe un livello giornaliero ottimale di produzione per A di 400 unità?

(c) La disponibilità di una importante materia prima è limitata al punto tale che la produzione totale $Q_A + Q_B$ non può superare 500 unità. Determinare i livelli giornalieri di produzione (Q_A^{**}, Q_B^{**}) che massimizzano il profitto in questa nuova situazione.

Esercizio 7.51.* ☕☕ L'utilità di uno studente è data dalla funzione

$$U(B, S, T) = B^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} - T^2$$

dove T indica il tempo che lo studente dedica allo studio, mentre B, S sono le unità di birra e salsicce che lo studente consuma. Il tempo a disposizione allo studente (da ripartire tra studio e altre attività) è di 16 unità temporali. I prezzi unitarî della birra e delle salsicce sono rispettivamente 1 e $p > 0$, mentre il reddito dello studente è uguale a $2T$ (ovvero lo studente percepisce due unità monetarie per ogni unità temporale dedicata allo studio).

Il problema dello studente consiste nella scelta ottimale di B, S, T (variabili a valori reali) in modo tale da massimizzare la propria utilità mantenendo la spesa non superiore al reddito.

(a) Si formalizzi il problema di scelta ottimale dello studente nella situazione qui appena descritta.

(b) Utilizzando la formalizzazione del punto (a), si trovino tutti i valori di $p > 0$ per i quali è ottimale che lo studente non dedichi alcun tempo allo studio.

Esercizio 7.52.* ☕☕☕ Edone e Tirchio sono due gemelli che hanno lo stesso reddito $r > 0$ e la stessa funzione di utilità $u(q_1, q_2) = q_1^{\frac{1}{4}} q_2^{\frac{3}{4}}$, dove q_1, q_2 indicano le quantità consumate di due beni. Siano 1 e $p > 0$ i rispettivi prezzi unitari dei due beni. Il problema di scelta di Edone consiste nella massimizzazione di u rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui la spesa di Edone non supera il reddito r. Siccome il mero atto di spendere causa disagio a Tirchio, il problema di scelta di Tirchio consiste nella massimizzazione della funzione $u(q_1, q_2) - s(q_1, q_2)$, dove $s(q_1, q_2)$ indica la spesa di Tirchio, sempre rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui la spesa di Tirchio non supera il reddito r.
Trovare i valori di $p > 0$ per cui coincidono le soluzioni dei problemi di scelta di Edone e Tirchio. Fornire una argomentazione *matematica* esaustiva.

Esercizio 7.53.* ☕☕☕ *Variazioni sul tema precedente.* Edone e Tirchio sono due gemelli che hanno lo stesso reddito $r > 0$ e la stessa funzione di utilità $u(q_1, q_2) = q_1^{\frac{3}{4}} q_2^{\frac{1}{4}}$, dove q_1, q_2 indicano le quantità consumate di due beni. Siano 2 e 3 i rispettivi prezzi unitari dei due beni. Il problema di scelta di Edone consiste nella massimizzazione di u rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui la spesa di Edone non supera il reddito r. Siccome il mero atto di spendere causa disagio a Tirchio, il problema di scelta di Tirchio consiste nella massimizzazione della funzione $u(q_1, q_2) - \lambda s(q_1, q_2)$, dove $s(q_1, q_2)$ indica la spesa di Tirchio e $\lambda > 0$ è il tasso di conversione delle unità monetarie in unità di utilità, sempre rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui la spesa di Tirchio non supera il reddito r.
Trovare i valori di $\lambda > 0$ per cui coincidono le soluzioni dei problemi di scelta di Edone e Tirchio. Fornire una argomentazione *matematica* esaustiva.

Esercizio 7.54.* Influencer e Influenzato sono due gemelli che hanno lo stesso reddito $r > 0$ e la stessa funzione di utilità $u(q_1, q_2) = q_1^{\frac{3}{4}} q_2^{\frac{1}{4}}$, dove q_1, q_2 indicano le quantità consumate di due beni. Siano $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$ i rispettivi prezzi unitari dei due beni. Il problema di scelta di Influencer consiste nella massimizzazione di u rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui la spesa di Influencer non supera il reddito r. Siccome Influenzato è tirchio, il problema di scelta di Influenzato consiste nella minimizzazione della propria spesa rispetto al paniere (q_1, q_2) vincolato ad appartenere alla parte del dominio di u in cui vale $u(q_1, q_2) \geq u(q_1^*, q_2^*)$, dove (q_1^*, q_2^*) indica il paniere ottimale nel problema di Influencer. In altre parole, Influenzato ha lo scopo di essere contento almeno quanto Influencer, spendendo il meno possibile.
Risolvere i problemi di scelta di Influencer e Influenzato. Fornire una argomentazione *matematica* esaustiva.

Esercizio 7.55. Il contadino Jones ha funzione di utilità $U(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$, dove le quantità x, y (non negative) rappresentano pane e vino, due beni di consumo che egli è obbligato a comprare al mercato in quanto nella sua fattoria non può produrli. I prezzi dei due beni sono rispettivamente 1 e $p > 0$, dove p, il prezzo del vino, varia ogni settimana per volere dei Mercanti di Liquori (con i quali non si può giocare al ribasso nei prezzi). Il problema del contadino Jones è quello di ottimizzare la spesa (riferita a questi due beni) sapendo che del suo reddito R solamente al più il 60% può essere destinato all'acquisto di pane e vino.

(a) Formalizzare il problema del consumatore mediante i dati forniti.

(b) Trovare, se esiste, il paniere ottimale (x^*, y^*) per il quale si massimizza l'acquisto minimizzando la spesa, argomentando rigorosamente cosa succede nei casi in cui i Mercanti di Liquori impongano un prezzo molto elevato oppure svendano il vino.

(c) Data la coppia ottimale (x^*, y^*) individuata nel punto precedente, per quale valore del prezzo p il contadino Jones è scoraggiato dall'acquistare il vino?

(d) Stabilire un tetto massimo al prezzo p per il quale risulti conveniente al contadino Jones di acquistare il pane in quantità doppie rispetto al vino.

Esercizio 7.56. Pinco è un appassionato collezionista di carte Pokémon e ogni settimana spende 100 euri in bustine (booster packs) al duplice scopo di collezionare e di scambiare. Durante una vacanza si imbatte in un negozio di articoli di collezionismo, modellismo, giochi da tavolo et cetera in cui si vendono anche bustine di tre espansioni differenti.
Pallo, il proprietario del negozio e anche commesso, ha stabilito la seguente regola: in un acquisto è possibile prendere un numero "a piacere" di bustine della terza espansione ma al più una bustina della prima espansione e almeno due bustine della seconda espansione.
Il prezzo-vettore delle rispettive espansioni (prezzi ordinati naturalmente) è $\boldsymbol{p} = (8, 11, 5)$ euri.
Lo scopo di Pinco è chiaramente quello di massimizzare la sua funzione di utilità descritta dalla funzione

$$U : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad U(x_1, x_2, x_3) = \ln\left(\sqrt{x_1 x_2} + x_3^2\right), \qquad (\Omega \subset \mathbb{N}^3)$$

Si tenga presente che Pallo non ha alcun interesse nel vendere di più o di meno.

(a) Determinare Ω e stabilire se è un insieme chiuso.

(b) Si formalizzi matematicamente il problema di Pinco, specificando tutti i vincoli.

(c) Esibire un ragionamento rigoroso e semplice (o addirittura *ovvio*) su quelli che saranno gli effettivi pacchetti acquistati da Pinco, determinandone quindi il numero e quindi massimizzando la funzione di utilità.

Pinco è rimasto molto soddisfatto e incuriosito, e decide settimanalmente di ricondursi al negozio di Pallo per acquistare (online) le sue carte secondo la medesima modalità di cui sopra. Dopo un certo numero di settimane, Pallo varia i prezzi delle tre espansioni adeguandosi *circa* ai prezzi di mercato (e di domanda) stabilendo il prezzo $q_1 = 10$ euri per la prima espansione, $q_2 = 2$ euri per la seconda espansione (talmente brutta da essere paragonata alla corrispettiva indecente espansione "Origini [Homelands]" del gioco di carte collezionabili Magic - The Gathering) e un prezzo q_3 per la terza espansione (recensita da collezionisti e appassionati di artwork come *sublime*).

(d) Si argomenti rigorosamente quale debba essere il *minimo* prezzo q_3 affinché Pinco sia scoraggiato dall'acquistare bustine della terza espansione (si trascurino le spese di spedizione e il *fattore di gambling*).

Esercizio 7.57. Sei falegnami producono pezzi per gli scacchi utilizzando legno di mogano per i pezzi neri, e legno di acero per i pezzi bianchi. Il falegname Panco si occupa delle torri, bianche e nere, e la sua funzione di produzione è

$$V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad V(x_1, x_2) = \left(x_1^{\frac{1}{2}},\ x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{3}}\right)$$

Siano p_i i prezzi unitarî di vendita delle torri e q_i i prezzi unitarî dei pezzi di legno.

(a) Si formalizzi il problema del produttore determinando la coppia ottimale (x_1^*, x_2^*) che risolve tale problema.
(b) Si risolva successivamente il problema numericamente per $p_1 = 10, p_2 = 8, q_1 = q_2 = 25$.
(c) Interpretare *matematicamente* ed *economicamente* la situazione in cui i prezzi di acquisto del legno e di vendita delle torri siano uguali, ossia $p_i = q_i$.
(d) Si consideri il caso in cui i prezzi di acquisto del legno superano i prezzi di vendita delle torri. Analizzare questa situazione in modo matematicamente rigoroso, fornendo esempi e una esaustiva interpretazione economica determinando, in conclusione, se il falegname smette di produrre oppure no.
(e) Il caso analizzato nel punto precedente è economicamente reale? Perché? In caso di risposta negativa, proporre il più semplice modello alternativo che curi l'idealità di tale situazione.

Esercizio 7.58. Il goloso Saraffo ama nutrirsi di ciarpame nei fast food, e vorrebbe recarsi al Burghiotto per concedersi cheeseburgers e patatine in quantità (*i.e.* porzioni) smisurate. La sua funzione di utilità è descritta da

$$V : \mathbb{N} \setminus \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2x_1} - \ln\left(x_1^2 + 3x_2\right)$$

dove x_1, x_2 indicano rispettivamente le quantità di cheeseburgers e patatine che Saraffo compra, i cui prezzi unitarî sono rispettivamente p_1 e p_2 (ovviamente strettamente positivi).

(a) Formalizzare e risolvere il problema del consumatore nel caso descritto, assumendo che il reddito mensile di Saraffo sia $R > 0$ (costante), stabilendo le eventuali differenze nel caso in cui Saraffo sia un consumatore povero oppure ricco. Si analizzi il problema per variabili continue, per semplicità (ma non è rigoroso!), convenendo che l'analisi standard non porta ad alcun risultato, mentre un ragionamento "più economico e meno matematico" mostra l'esistenza di un paniere ottimale.

Un giorno, leggendo una rivista obsoleta, Saraffo nota un annuncio interessante: abbonandosi mensilmente a tale rivista obsoleta per una quantità di denaro pari a $b > 0$ riceverebbe un coupon che gli permetterebbe di pagare i cheeseburgers ad un prezzo pari a $\frac{p_1}{4}$ (il prezzo delle patatine rimane invariato).

(b) Stabilire, argomentando esaustivamente, per quali valori di b Saraffo accetta di abbonarsi, per quali valori di b gli risulta indifferente abbonarsi oppure no, e per quali valori di b l'abbonamento risulta invece svantaggioso.
(c) Riflettere sulla realtà di questo esercizio analizzando la situazione in cui $R < p_1$, studiando da un punto di vista economico le conseguenze (vantaggiose o svantaggiose) di un abbonamento per come descritto precedentemente. Si fornisca un esempio numerico per illustrare il tutto.

Esercizio 7.59. Penco, uno dei falegnami dell'esercizio 7.56, decide di assumere un apprendista falegname che lo aiuti nella produzione delle torri, e in particolare gli affida la completa manufattura delle torri bianche. Queste torri bianche saranno infine vendute ad un prezzo pari a $p > 0$, mentre $\omega \geq 0$ sarà lo stipendio dell'apprendista. Penco ha ha disposizione nelle sue riserve un numero pari a 10 di pezzi di legno d'acero, dai quali intagliare le torri. Sia noto che all'occorrenza si potranno comperare al mercato ulteriori pezzi di legno d'acero ad un prezzo pari a s oppure si potranno vendere al mercato pezzi di legno (in abbondanza, o in caso di necessità economica) allo stesso prezzo di acquisto.

(a) Si formalizzi il problema del produttore nella situazione descritta, derivando tutte le condizioni di ottimalità stabilendo se e perché siano condizioni sufficienti o no.
(b) Si risolva il problema considerando la funzione di utilità $U(\ell, m) = \ell^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{3}}$, dove ℓ, m rappresentano rispettivamente il lavoratore apprendista e il materiale necessario.
(c) Stabilire l'intervallo dei valori di p per il quale sia più profittevole vendere il materiale in eccesso.