

Problemi ed Esercizi di Matematica Discreta - Foglio D.

Matematica, Università degli studi di Bologna.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

Nota: tutti i problemi riguardanti combinatoria, probabilità e distribuzioni di probabilità sono stati dati in fogli a parte, e affrontati direttamente.

D.0. Quanti modi vi sono per porre i numeri da 1 a $2n$ in una matrice $2 \times n$ in modo che gli elementi delle righe e delle colonne siano in orde crescente da sinistra a destra e dall'alto al basso? Per esempio, una soluzione quando $n = 5$ è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

D.1. In quanti modi si può costruire un pilastro $2 \times 2 \times n$ con mattoni $2 \times 1 \times 1$?

D.2. *Eliminato poiché mostruosamente difficile.*

D.3. *Eliminato poiché mostruosamente difficile.*

D.4. Qual è la probabilità che la carta più in alto e quella più in basso in un mazzo mischiato a caso siano entrambi degli assi? (Si consideri un mazzo standard da 52 carte).

D.5. Costruite una variabile aleatoria tale che abbia media finita e varianza infinita.

D.6. Chi cresce più rapidamente tra $n^{\ln(\ln(\ln(n)))}$ e $(\ln(n))!$?

D.7. Calcolare $(n + 2 + O(n^{-1}))^n$ con errore relativo $O(n^{-1})$.

D.8. Vero o falso? $\cos(O(x)) = 1 + O(x^2)$ per tutti gli x reali.

D.9. Vero o falso? $O(x + y)^2 = O(x^2) + O(y^2)$.

D.10. Calcolare il "fattoriale di Fibonacci" $\prod_{k=1}^n F_k$ con un errore relativo di $O(n^{-1})$ o migliore. La vostra soluzione potrebbe contenere una costante che non conoscete in forma chiusa.

D.11. Vero o falso?

$$\int_n^{+\infty} O(x^{-2}) dx = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow +\infty$$

D.12. Dimostrate che

$$B_m(\{x\}) = -2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2\pi kx - \frac{1}{2}\pi m)}{k^m}, \quad m \geq 2$$

utilizzando il calcolo dei residui, integrando

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2\pi i e^{2\pi i z \theta}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{dz}{z^m}$$

sul contorno del quadrato $z = x + iy$, dove $\max(|x|, |y|) = M + \frac{1}{2}$, e facendo tendere M a infinito. ($B_m(\{x\})$ indica i polinomi di Bernoulli, e $\{x\}$ indica la parte decimale di x).