Ottimizzazione Convessa e Combinatoria - Problemi ed Esercizi.

Foglio 2.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

2.0. Si determinino per *due* procedimenti diversi (con e senza i moltiplicatori di Lagrange) le soluzioni dei seguenti problemi di massimizzazione:

(a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + xy$ soggetta a $3x + y = 7$.

(b) $g(x,y) = 3x + 4y$ soggetta a $x^2 + y^2 = 1$.

(c) $h(x,y,z) = 2x + y + z$ soggetta a $x^2 + y + z = 4$ e $x + 2y - z = 6$.

(d) $k(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2$ soggetta a $x + 2y + z = 1$.

2.1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x,y,z) = -(xy + yz)^2 + x - z$. Trovare, se esistono, massimo e minimo assoluti di f sull'insieme $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + zy + x - z = 0\}$.

2.2. Risolvere il problema

$$\min_{x,y} \{(x-2)^2 + y\}, \qquad \text{soggetta a } \begin{cases} y - x^3 \geq 0 \\ y + x^3 \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

graficamente, e verifichi che la soluzione non rispetta le condizioni di KKT.

2.3. Sia $f(x,y,z) = xyz$ e siano A_1 e A_2 i seguenti insiemi:

$$A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \qquad A_2 = A_1 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

(a) Dimostri che $(1,1,1)$ e $(0,0,0)$ non sono estremanti locali di f in $\mathbb{R}^3$.

(b) Dimostri che f ammette massimo e minimo assoluto su A_1. Trovi il massimo, il minimo e i punti in cui si raggiungono.

(c) Trovi il massimo e il minimo di f su A_2 e i punti in cui si raggiungono.

2.4. Si consideri il seguente problema:

$$\max \{2x + 3y\}, \qquad \text{soggetta a } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

(a) Determinare le coppie (x^*, y^*) che soddisfano le condizioni di Kuhn-Tucker.

(b) Risolvere il problema di massimizzazione dato.

(c) Si osservi che i valori trovati nei due punti precedenti sono differenti. Perché?

2.5. L'utilità di uno studente è data dalla funzione

$$U(B,S,T) = B^{\frac{1}{2}} S^{\frac{1}{2}} - T^2$$

dove T indica il tempo che lo studente dedica allo studio, mentre B, S sono le unità di birra e salsicce che lo studente consuma. Il tempo a disposizione allo studente (da ripartire tra studio e altre attività) è di 16 unità temporali. I prezzi unitarî della birra e delle salsicce sono rispettivamente 1 e $p > 0$, mentre il reddito dello studente è uguale a $2T$ (ovvero lo studente percepisce due unità monetarie per ogni unità temporale dedicata allo studio).

Il problema dello studente consiste nella scelta ottimale di B, S, T (variabili a valori reali) in modo tale da massimizzare la propria utilità mantenendo la spesa non superiore al reddito.

(a) Si formalizzi il problema di scelta ottimale dello studente nella situazione qui appena descritta.

(b) Utilizzando la formalizzazione del punto (a), si trovino tutti i valori di $p > 0$ per i quali è ottimale che lo studente non dedichi alcun tempo allo studio.

2.6. Il contadino Jones ha funzione di utilità $U(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$, dove le quantità x, y (non negative) rappresentano pane e vino, due beni di consumo che egli è obbligato a comprare al mercato. I prezzi dei due beni sono rispettivamente 1 e $p > 0$. Il prezzo del vino, p, varia ogni settimana per volere dei Mercanti di Liquori. Il problema del contadino Jones è quello di ottimizzare la spesa sapendo che del suo reddito R solamente al più il 60% può essere destinato all'acquisto di pane e vino.

(a) Formalizzare il problema del consumatore e trovare, se esiste, il paniere ottimale (x^*, y^*) per il quale si massimizza l'acquisto minimizzando la spesa, argomentando rigorosamente cosa succede nei casi in cui i Mercanti di Liquori impongano un prezzo molto elevato per il vino oppure lo svendano.

(b) Per quale valore del prezzo p il contadino Jones è scoraggiato dall'acquistare il vino?

(c) Stabilire un tetto massimo al prezzo p per il quale risulti conveniente al contadino Jones acquistare il pane in quantità doppie rispetto al vino.