

Ottimizzazione Convessa e Combinatoria - Problemi ed Esercizi.

Foglio 3.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

3.0. Una famiglia di funzioni concave. Per $0 < \alpha \leq 1$ siano

$$u_\alpha(x) = \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}$$

nel dominio $\mathcal{D}(u_\alpha) = \mathbb{R}^+$, e sia per definizione $u_0(x) = \log(x)$ con dominio naturale.

1. Si mostri che per $x > 0$, $u_0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha(x)$

2. Mostrare che l'intera famiglia di funzioni u_α è concava, monotona crescente e tale che $u_\alpha(1) = 0$.

3.1. Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione differenziabile con dominio convesso, e tale che $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Si mostri che f è log-concava se e solo se per ogni x, y nel dominio si ha

$$\frac{f(y)}{f(x)} \leq \exp\left(\frac{\nabla f(x)^t (y - x)}{f(x)}\right)$$

3.2. Sia S_{++}^n l'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche a coefficienti strettamente positivi. Mostrare che la funzione

$$f(X) = \frac{\det(X)}{\text{tr}(X)}, \quad X \in S_{++}^n$$

è log-concava.

3.3. Condizioni di Fritz John. Minimizzare la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ soggetta a $-x^3 + y^2 \leq 0$.

3.4. Dimostriamo il Teorema Spettrale per le matrici simmetriche usando i moltiplicatori di Lagrange.

Teorema. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica reale. Allora esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^n costituita da autovettori di A .

Consideriamo la forma quadratica associata ad A , ossia la funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum A_{ij} x_i x_j$, e si voglia ottimizzare f sulla sfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} , ossia con il vincolo $\|x\|^2 - 1 = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostrare che la restrizione di f su \mathbb{S}^{n-1} ammette massimo e minimo assoluti.

(b) Dati λ_1 e v_1 tali che $\lambda_1 = f(v_1)$, dove $\lambda_1 = \max f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ e $v_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$, dimostrare che $Av_1 = \lambda_1 v_1$.

(c) Si ottimizzi f su \mathbb{S}^{n-2} con $\mathbb{S}^{n-2} = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} \mid \langle x, v_1 \rangle = 0\}$.

(d) Si ripeta la richiesta precedente su \mathbb{S}^{n-3} .

(e) Si mostri che iterando il processo si ottengono n vettori v_1, v_2, \dots, v_n ortogonali tra loro e pure ortonormali, ossia quindi una base ortonormale di \mathbb{R}^n , tali che $Av_k = \lambda_k v_k$, dove $\lambda_k = \max f|_{\mathbb{S}^{n-k}} = f(v_k)$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$

(f) Dedurre infine che il massimo di f sulla sfera \mathbb{S}^{n-1} è il più grande autovalore di A , mentre il minimo di f è il più piccolo autovalore di A , e i rispettivi punti di massimo e minimo sono i corrispondenti autovettori normalizzati.