Ottimizzazione Convessa e Combinatoria - Problemi ed Esercizi.

Foglio 1.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

1.0. Stabilire se la seguente funzione è concava su $\mathbb{R}^2$ oppure no.

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2\ln\left(\pi+\frac{e^{x^{2019}}+y^{e^{2019}}}{2019^{e^{xy}}}\right)}$$

1.1. *Un primo utilizzo della Hessiana.* Mostrare che la funzione

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=-e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

non è convessa su $\mathbb{R}^2$, ma è tuttavia convessa su ogni sottoinsieme convesso del cerchio unitario centrato in $(0,0)$.

1.2. Mostrare che la funzione $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\lambda x^2+\frac{3}{2}x(1-y)+2\lambda y^2+\lambda e^x$ risulta convessa in $\mathbb{R}^2$ per $\lambda\geq\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

1.3. Sia $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita dall'espressione $h(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$.

(a) Si verifichi che le restrizioni di h alle rette del fascio passante per l'origine hanno un minimo locale in $(0,0)$.

(b) Si dimostri che h non ha un minimo locale nell'origine $(0,0)$. (Suggerimento: si studino $h(a,2a^2)$ e $h(0,b)$).

1.4. Determini gli estremi locali, se esistono, delle seguenti funzioni, e determini se sono estremanti globali in $\mathbb{R}^2$.

(a) x^2+y^2-xy.

(b) $x^3-3xy+y^3$.

(c) $xy-2x^3-2y^3+4x^2y^2$.

(d) $(2x-x^2)(2y-y^2)$.

(e) $2x^3+xy^2+5x^2+y^2$.

(f) $x^2-3xy^2+2y^4$ (Suggerimento: si studi $f\left(\frac{3}{2}\varepsilon^2,\varepsilon\right)$).

(g) $x^2y+y^3-x^3-xy^2$.

(h) $e^x(x^3+y^2-2xy)$ (Suggerimento: studi $f(\varepsilon,\varepsilon)$; osservi che la funzione si può rappresentare come $e^x(x^3-x^2)+e^x(y-x)^2$.

1.5. *Allenamento.* Si familiarizzi con l'ottimizzazione vincolata risolvendo i seguenti problemi in due modi: con i moltiplicatori di Lagrange e senza. Giustificare sempre l'esistenza (o l'inesistenza) di massimi e minimi assoluti.

(a) Trovare massimo e minimo assoluti di $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$, con $f(x,y)=|x|+|y|$, sulla curva $x^2+y^2=1$, dove $\mathbb{S}^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

(b) Trovare il più piccolo cerchio centrato nell'origine di $\mathbb{R}^2$ che ha intersezione non vuota con la curva $xy=k$ per $k\neq 0$.

(c) Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{2x^2-xy+y^2}$ sulla retta $x+y=8$.

(d) Sia $f:K_n\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y)=-x\ln(x)-y\ln(y)$. Stabilire se l'insieme $f(K_n)$ è compatto, dove $K_n=\{(x,y)\in(0,+\infty)^2 : x+y=n,\ n\in\mathbb{N},\ n>0\}$.