

Problemi ed Esercizi in Matematica Discreta.

Qualcosa con cui divertirsi.

E. Masina - enrico.masina3@unibo.it

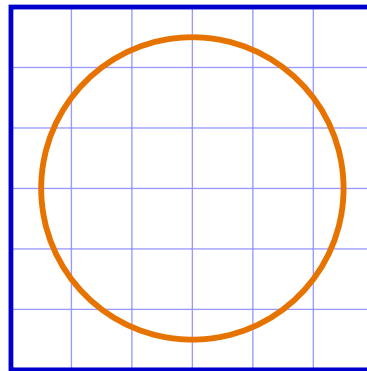
M.0. Supponete che ci siano $2n$ persone disposte intorno a un cerchio; le prime n sono “persone buone”, e le ultime n sono “persone cattive”.

Mostrate che esiste sempre un intero m dipendente da n tale che se giriamo attorno al cerchio uccidendo una persona ogni m , tutti gli uomini cattivi sono i primi ad essere eliminati (esempio: quando $n = 3$ possiamo prendere $m = 5$; quando $n = 4$ possiamo prendere $m = 30$).

M.1. Calcolare la somma $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k k}{4k^2 - 1}$

M.2. I giocatori di “cribbage” sanno da tempo che $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Trovate il numero di modi per rappresentare 1050 come somma di interi positivi consecutivi (la rappresentazione banale 1050 da sola conta come un modo; allora ci sono quattro modi per rappresentare 15 come somma di interi positivi consecutivi. Tra l’altro la conoscenza delle regole del “cribbage” è irrilevante ai fini del problema.)

M.3. Un cerchio, con diametro $2n - 1$ unità, è stato disegnato in modo simmetrico su una scacchiera $2n \times 2n$ qui illustrata per $n = 3$:



(a) Quante caselle della scacchiera contengono un pezzetto del cerchio?

(b) Trovate una funzione $f(k)$ tale che esattamente $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ caselle della scacchiera giacciono interamente dentro il cerchio.

M.4. Semplificate l’espressione $[(n + 1)^2 n!e] \pmod n$.

M.5. Quanti numeri della forma 2^m , per $0 \leq m \leq M$, hanno come prima cifra 1 in notazione decimale?

M.6. Qual è il più piccolo intero positivo che ha esattamente k divisori, per $1 \leq k \leq 6$?

M.7. Mostrare che $\frac{3^{77}-1}{2}$ è dispari.

M.8. Determinare il valore di $1000! \pmod{10^{250}}$ tramite un calcolo manuale.

M.9. Mostrare che se $2^n + 1$ è primo allora n è una potenza di 2.

M.10. Quale numero binario corrisponde al numero di Eulero e , nella corrispondenza tra rappresentazione binaria e rappresentazione di Stern-Brocot? (Esprimete la vostra risposta come somma infinita, non è necessario che la calcoliate in forma chiusa).

M.11. Sia n un dato numero intero positivo; per quali valori di k il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è massimo? Dimostrare la risposta data.

M.12. Mostrate che $-2(\ln(1 - z) + z)/z^2$ è una funzione ipergeometrica.

M.13. Quanto vale $\sum_k \binom{n}{k}^3 (-1)^k$?

M.14. Trovate una forma chiusa per $\sum_{k \leq n} \binom{2k}{k} 4^{-k}$

M.15. Trovate una forma chiusa per

$$\sum_{k \geq 1} \binom{n}{\lfloor \log_m(k) \rfloor}$$

quando m, n sono interi positivi.

M.16. Utilizzare l'approssimazione di Stirling per stimare $\binom{m+n}{n}$ per m, n grandi. Osservare cosa accade quando $m = n$.

M.17. È possibile costruire una pila di n mattoni in modo tale che il mattone più alto stia completamente al di fuori del mattone più basso, mentre una persona che pesa quanto 100 mattoni possa stare in equilibrio a metà del mattone più alto senza far cadere la pila?

M.18. Mostrare che $\frac{d}{dz}(z!)$ è in relazione con i numeri armonici generalizzati.

M.19. *Problema di ricerca.* Dimostrare l'irrazionalità di γ e di e^γ , dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

M.20. Quanti modi vi sono per porre i numeri da 1 a $2n$ in una matrice $2 \times n$ in modo che gli elementi delle righe e delle colonne siano in orde crescente da sinistra a destra e dall'alto al basso? Per esempio, una soluzione quando $n = 5$ è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

M.21. Qual è la probabilità che la carta più in alto e quella più in basso in un mazzo mischiato a caso siano entrambi degli assi? (Si consideri un mazzo standard da 52 carte).

M.22. Costruite una variabile aleatoria tale che abbia media finita e varianza infinita.

M.23. Chi cresce più rapidamente tra $n^{\ln(\ln(\ln(n)))}$ e $(\ln(n))!$?

M.24. Calcolare $(n + 2 + O(n^{-1}))^n$ con errore relativo $O(n^{-1})$.

M.25. Vero o falso? $\cos(O(x)) = 1 + O(x^2)$ per tutti gli x reali.

M.26. Vero o falso? $O(x + y)^2 = O(x^2) + O(y^2)$.

M.27. Calcolare il "fattoriale di Fibonacci" $\prod_{k=1}^n F_k$ con un errore relativo di $O(n^{-1})$ o migliore. La vostra soluzione potrebbe contenere una costante che non conoscete in forma chiusa.

M.28. Vero o falso?

$$\int_n^{+\infty} O(x^{-2}) dx = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow +\infty$$

M.29. Dimostrate che

$$B_m(\{x\}) = -2 \frac{m!}{(2\pi)^m} \sum_{k \geq 1} \frac{\cos(2\pi kx - \frac{1}{2}\pi m)}{k^m}, \quad m \geq 2$$

utilizzando il calcolo dei residui, integrando

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{2\pi i e^{2\pi i z \theta}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{dz}{z^m}$$

sul contorno del quadrato $z = x + iy$, dove $\max(|x|, |y|) = M + \frac{1}{2}$, e facendo tendere M a infinito. ($B_m(\{x\})$ indica i polinomi di Bernoulli, e $\{x\}$ indica la parte decimale di x).

M.30. *Lelezione dei piccioni.* I piccioni degli stati Uniti del Pigeon stanno conducendo una elezione per determinare chi sarà il Gran Piccione. Le elezioni in questo stato sono abbastanza peculiari per via di una lunga e storica tradizione chiamata “Università Elettorale”.

Ecco le regole:

1. Gli stati Uniti del Pigeon contano 50 stati, e ciascun piccione appartiene ad uno di essi (ovviamente). Vi sono in totale $2k^2 - 1$ piccioni nello stato k , per $1 \leq k \leq 50$.
2. Ci sono due candidati al titolo di Gran Piccione: Pigeon e Pigeonacci.
3. Ogni piccione vota per uno dei due candidati precedenti.
4. Il candidato che riceve più voti nello stato k -esimo, prende k voti all’Università Elettorale.
5. Il candidato che prende il maggior numero di voti all’Università Elettorale, diventa Gran Piccione.

Ciò detto:

- (a) Determinare il *minimo* numero totale di voti necessari affinché un qualunque candidato diventi Gran Piccione. Chiarimento: si trovi ossia un numero p tale che il Gran Piccione ottenga sempre almeno p voti dai piccioni votanti, e tale che un totale di $p - 1$ voti non sia mai sufficiente per vincere.
- (b) Si generalizzi il problema al caso di $4n + 2$ stati invece che 50. Si dia una forma chiusa che esprima il minimo numero totale di voti, per come discusso al punto precedente, in funzione di n .

M.31. Sia dia una dimostrazione per la seguente identità:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2} = \pi^2 \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

utilizzando solamente la “matematica dell’epoca di Eulero” (18-esimo secolo).